

中華民國第 65 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組 物理科

第二名

探究精神獎

030107

沃辛頓射流控制術-不對稱邊界的影響

學校名稱：臺中市立大業國民中學

作者： 國三 郭芷彤 國三 黃于恩	指導老師： 蔡昇益
---------------------------------	------------------

關鍵詞：沃辛頓射流、表面張力、空蝕現象

摘要

沃辛頓射流是指物體掉入液體中後，在液體下形成空腔，經由表面張力的作用，空腔收縮並向上噴射的水流。瞭解射流機制與抑制射流引發的噴濺，在機械潤滑與公衛領域是重要的課題。本研究透過空腔與容器的交互作用，影響射流的形成，空腔形變會改變表面張力的合力方向，使得局部收縮速率不同，進而影響射流的高度與方向。透過改變空腔兩側形變的程度，我們可以有效控制射流偏移方向，本研究進一步透過自製頂針，讓空腔局部變形，藉此產生射流偏移，證實張力波並非射流偏移的主要因素。本研究的成果，為射流的研究提供一個新的觀點：空腔弧度大小決定收縮速率與方向，未來可藉此影響空腔收縮，協助科學家降低空蝕現象對機械的破壞。

壹、前言

一、研究動機

偶然的機會下看到一則日本免治馬桶的廣告，他們在馬桶水面上鋪設泡沫，以降低水花的噴濺，因為十分有趣，所以就開始搜尋資料，我們發現有許多科展團隊研究過沃辛頓射流，代表這是一個重要的研究主題。然而，多數組別研究的重點，多放在落水物體的形狀、速度跟產生射流的關係(謝承憲、林意勳、林芷卉、廖彥睿、吳政穎、張馨文 2013)(王昱權、陳御章、王昊恩、沈驗、王相川 2013)，諸多優秀作品中，令我們印象深刻的是蠟油模擬液體碰撞實驗(林紫彤、張祐薰、陳可芯、董心媛、陳宥仔、梁倚慈、韓順興，2015)，此團隊使用蠟油凝固的原理，紀錄蠟油滴落在表面後的形狀。當蠟油滴落水面時，滴落速率越低，由於水的緩衝，凝固後會更接近球體，反之滴落速率越快，緩衝能力不足，凝固後的形狀會更加破碎。這引起我們的關注，由於沃辛頓射流是水滴碰撞液面造成，我們若改變容器形狀，使得緩衝效果不均勻，是不是就可以產生不同方向或形態的射流？帶著這個想法，開始朝這個方向蒐集文章，但中文相關的內容很少，透過老師的協助，我們找到幾篇專業的論文，發現可以透過改變容器形狀，來改變射流的方向。我們想重現這個研究，以及尋找加以控制射流的可能性。

二、文獻回顧

沃辛頓射流是由於物體掉落液面，在多種作用力的影響下，液面在回復原狀時，會在物體掉落處形成高約 20mm 左右的水柱(見圖 1)。這個過程中，掉落物在液面下形成空腔，空腔的收縮再進一步形成射流，因此空腔的演化是研究的主軸。影響空腔演化的因素，主要有五個面向，分別是液體密度、液體黏滯性、表面張力大小、掉落物體的運動速率與形狀，我們找到兩篇探討空腔演化的文章，他們透過比對電腦模擬與實際測量的數據，分別解釋空腔的演化與射流的形成。

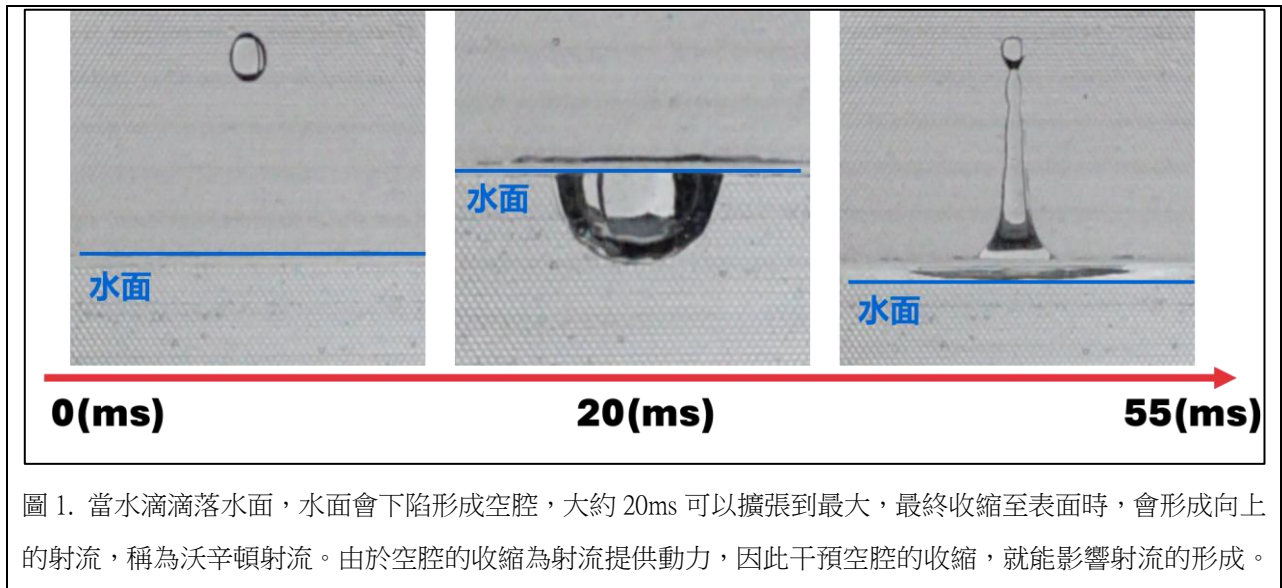
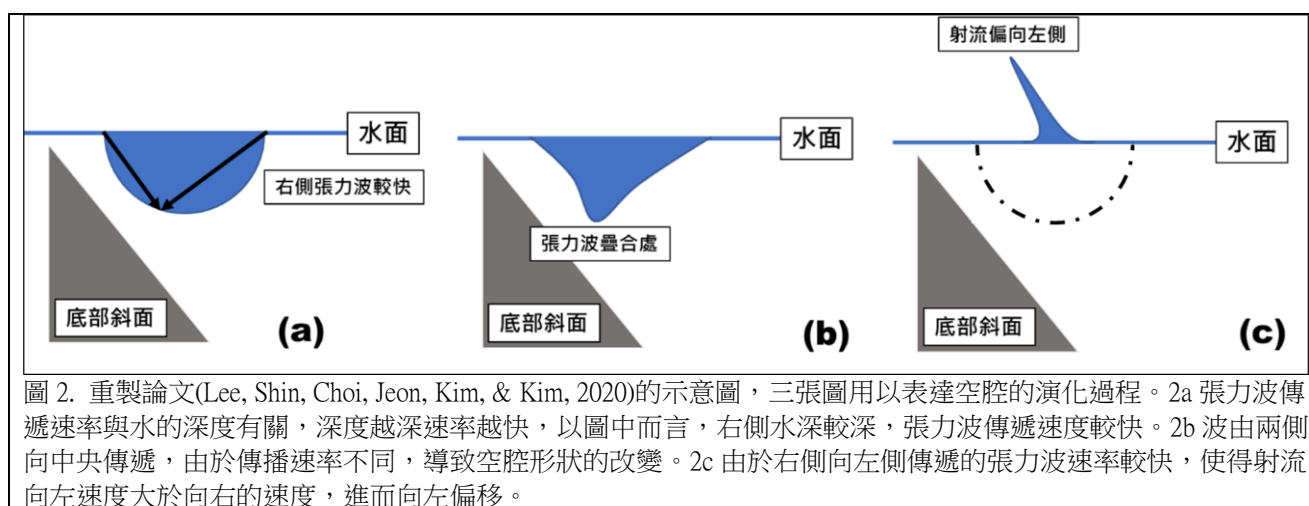


圖 1. 當水滴滴落水面，水面會下陷形成空腔，大約 20ms 可以擴張到最大，最終收縮至表面時，會形成向上的射流，稱為沃辛頓射流。由於空腔的收縮為射流提供動力，因此干預空腔的收縮，就能影響射流的形成。

第一篇論文(Berberović, van Hinsberg, Jakirlić, Roisman, & Tropea, 2009)認為空腔在液體壓力、表面張力的作用下，經歷擴張與收縮。他們使用電腦建立模型，模擬空腔的演化過程，相當貼近真實影像。為確定模型的正確性，他們記錄空腔半徑隨時間的變化，預測與實際結果相當貼合，說明表面張力與液體壓力確實主導空腔的演化。他們還發現在空腔的表面上，有張力波由空腔邊緣的突起處向空腔底部傳遞，從模擬數據推測，應是空腔邊緣的突起處，表面彎曲程度較大，表面張力的合力將液體向下推擠，引發張力波向空腔底部傳播，最終由於張力波會在空腔底部結合，進而產生沃辛頓射流。

第二篇論文(Lee, Shin, Choi, Jeon, Kim, & Kim, 2020)在前述論文的基礎上，探討張力波傳遞速度差異的影響，他們將斜面置於水缸底部，使得空腔左右兩側有不均勻的液體深度，見圖 2a、2b、2c，由空腔兩側向底部傳播的張力波，由於速度不同，交會處偏向左側。他們認為張力波的傳遞速度會受到液體深度的影響，左側的張力波貼近斜面水深較淺，張力波傳遞速率較慢，使得兩波交會處偏向空腔底部的左側，更由於右側向左側傳遞的波較快，當兩波相遇時，會產生向左運動的速率，導致射流偏向左側。



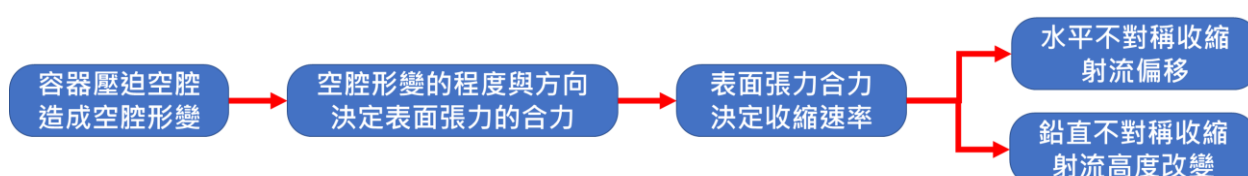
比對兩篇論文，都贊同張力波的存在，但第一篇論文在文中強調尚不清楚張力波形成機制，第二篇論文認為是液體深度差異，導致張力波傳播速度不同，進而使射流傾斜。我們感到疑惑的地方主要是當右側較快的張力波傳遞到左側時(見圖 2a)，由於水深減少波速應該下降，這麼一來兩波交會時的速率應該相同，應該會相互抵消，怎麼會導致射流有向左的速度？

我們專注在空腔形變與射流的關聯，觀察水深對空腔演化的影響。我們發現造成射流偏移的主因是空腔的形變，空腔的外形決定表面張力的合力方向，進而改變局部收縮的速率與方向，基於上述觀察，我們透過自行設計的頂針，改變空腔局部形變的位置來影響射流，證實張力波的波速差異，並不是射流偏移的主因，而是空腔形變造成的收縮速率差異導致射流偏移。透過改變空腔外形來干預收縮，或許可以協助降低空蝕現象對機械的破壞。

三、研究目的

1. 探討空腔形變與射流的關係。
2. 探討不對稱邊界對射流的影響。
3. 論證射流偏移的原因。

我們將透過數據與影像截圖，論證以下邏輯：



貳、研究設備及器材

硬體設備

水缸(25cm × 15cm × 20cm) 一座	壓克力片 四片 (100mm × 100mm × 3mm)	微調升降台 一座
自製可微調水平底板 一式	雷射水平儀	自製距離參考尺 一支
5ml 針筒 一根	橡膠軟管 一條	玻璃滴管 一根
自製鏡頭墊片 五枚	滴定管架 一座	手機
相機	可調亮度 LED 補光燈	

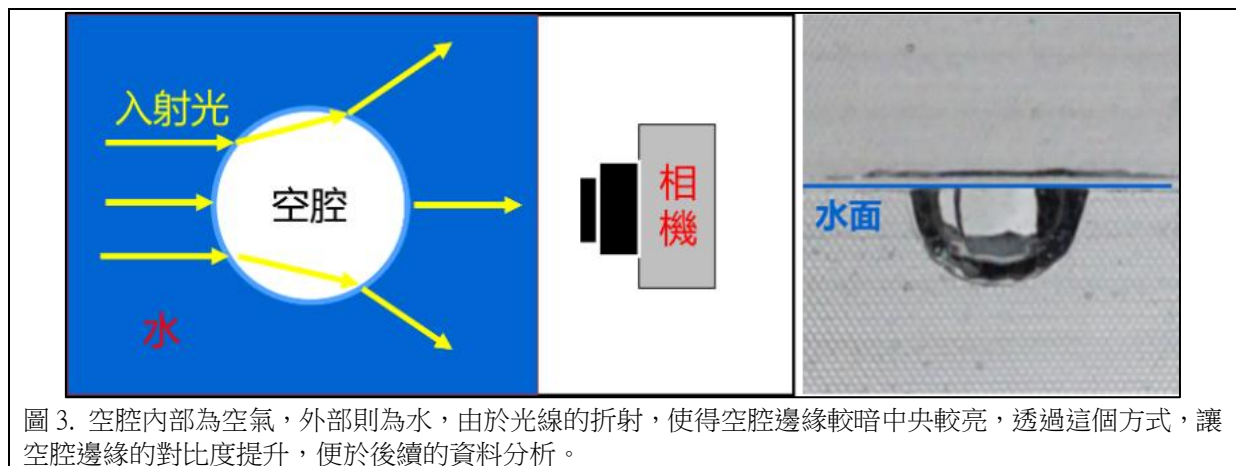
分析與校準軟體

Tracker	Phyphox
---------	---------

參、研究過程或方法

一、攝影器材的選用與問題排除

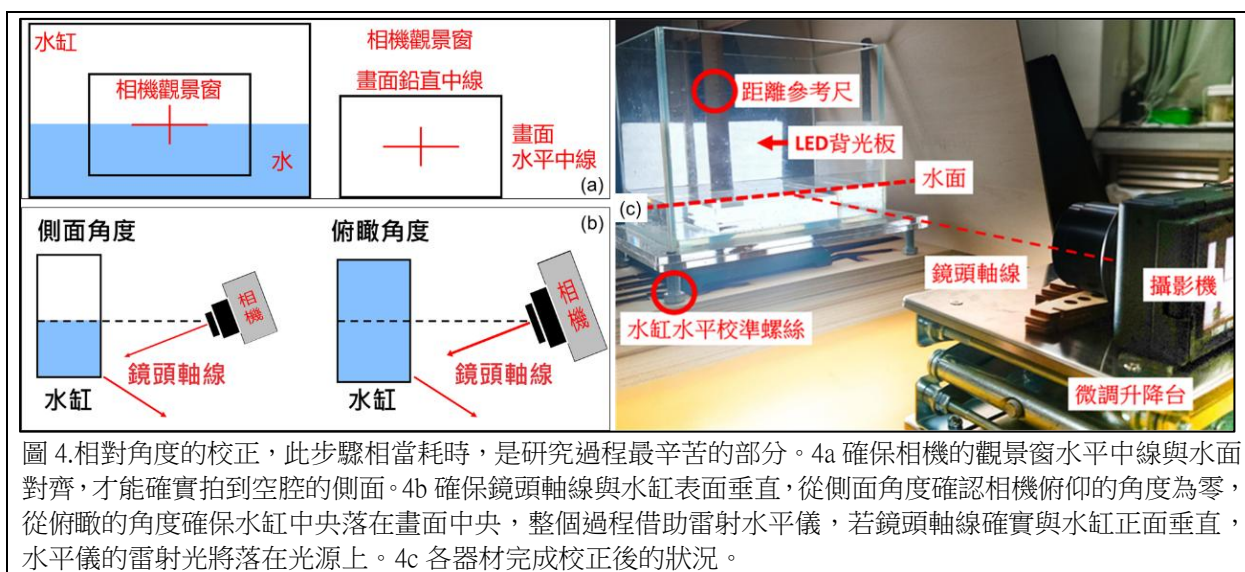
從空腔到形成噴流，整個過程的時間約 50 毫秒，一般的手機影格速率(frame rates) 約為 60~120fps，整個過程只能拍下 3~6 張照片，這樣並無法詳細地記錄運動過程，為此



我們選影格速率為 960fps 的相機進行拍攝，整個過程約拍攝 48 張照片，可以更清楚地觀察空腔的變化；與此同時也面臨畫面太暗的問題，我們嘗試正面補光，但是玻璃水缸的反光太強，與老師討論之後，我們決定使用背光板來解決問題。見圖 3，左側是光線從水進入空腔的示意圖，由於折射的影響，空腔邊緣的光線會發散，進到相機的光線減少，與背光板相比亮度較低，可以讓邊緣的形狀更加清楚。

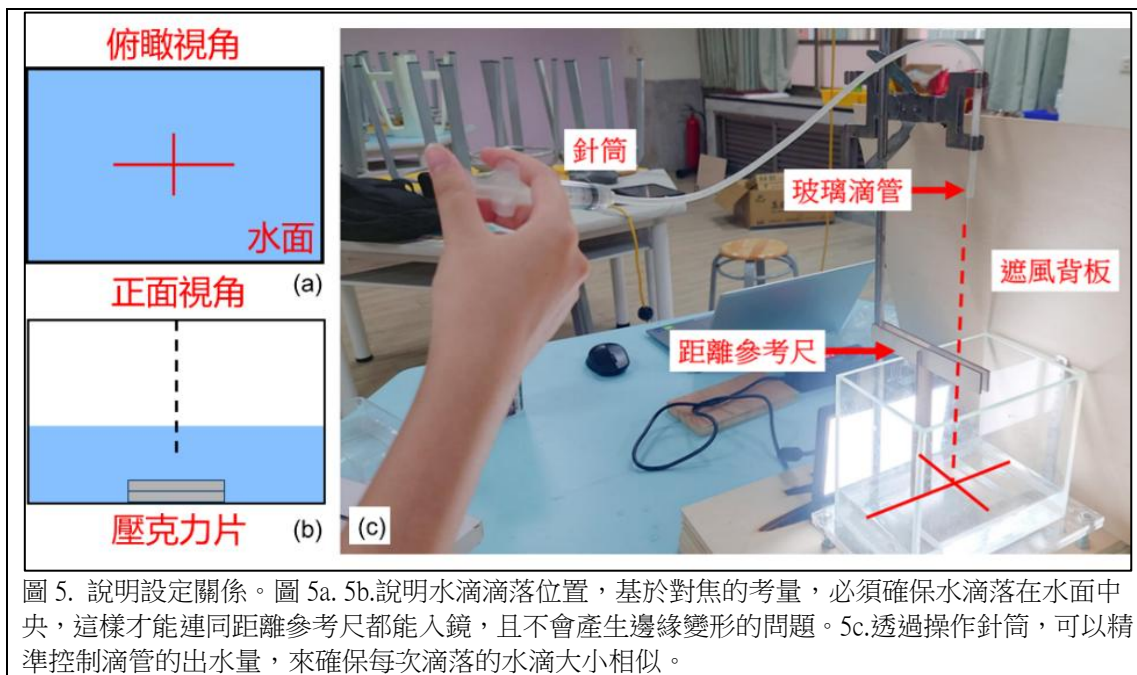
二、相機安裝與校正

相機分為廣角端與望遠端，其中廣角端常有畫面邊緣變形的問題，為避免畫面變形對後續分析造成困難，使用望遠端並讓相機觀景窗的水平中線對齊水面(見圖 4a)，並且確保水滴會沿著鉛直中線落下。但是只對齊觀景窗還不夠，應該要確保鏡頭軸線跟方形水缸正面完全垂直(見圖 4b)，此時我們用雷射光束與平面鏡來進行校正，將平面鏡貼在水缸正面，雷射光筆放在相機頂部與鏡頭軸線對齊，當雷射光經由平面鏡反射之後，會照在相機上，若鏡頭軸線確實已經跟水缸正面垂直，那麼雷射光將會照射在發射處，藉此完成校準的工作。



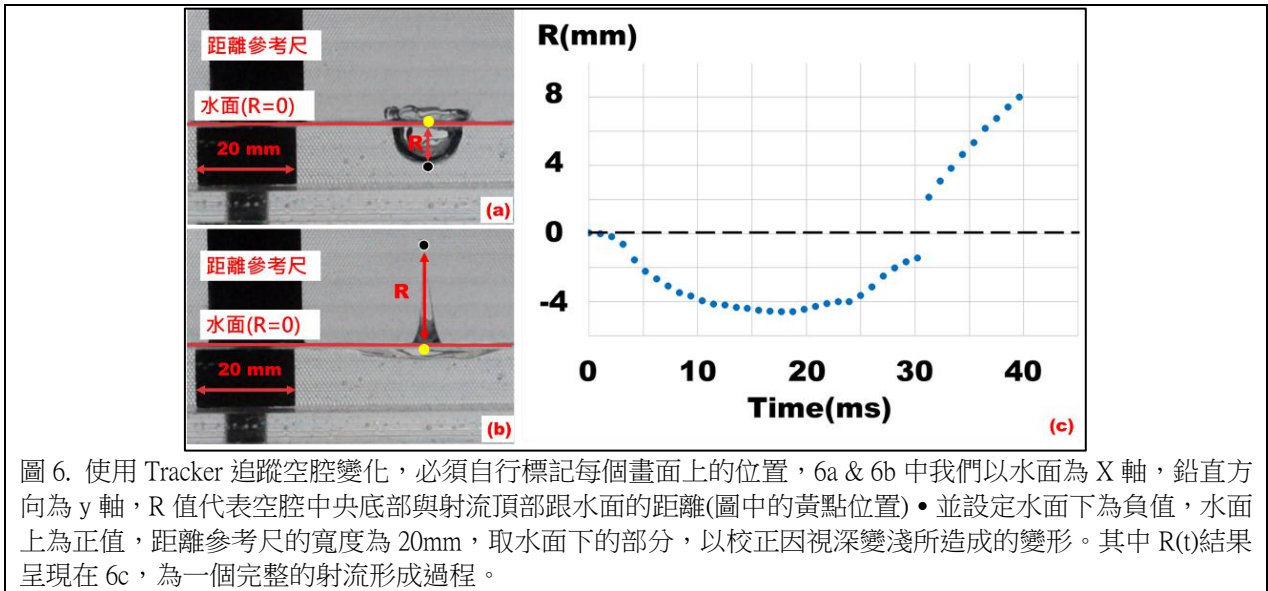
三、水缸水平校正與水滴控制器校正

相機在影格速率 960fps 的情況下，光圈值較小，因此景深較淺，對焦位置前後一公分左右的範圍才清楚，所以必須嚴格限制落水位置(見圖 5a & 5b)，對焦位置設定在水缸中央，並在旁邊設置距離參考尺，作為後續影片分析時的長度基準。水滴的大小則使用固定口徑的滴管控制，水滴直徑約為 2.5 mm，使用軟管將 5ml 針筒與滴管連結(見圖 5c)，只要輕推針筒就能滴落大小相近的水滴，可避免滴水時使滴管偏移。水缸底部與水面是否保持平行會影響到水深，所以我們使用手機的水平儀 app(Phyphox)進行校正，因為必須控制水面位置不變(確保水面在相機觀景窗中央)，我們透過添加壓克力片與抽水的方式，控制落水位置的水深，壓克力片為邊長 10cm 正方形，厚度 3mm，產生的空腔半徑都在 5~10 mm 左右，壓克力片的大小可以覆蓋整個空腔，不會出現局部水深不同的問題。



四、影片分析

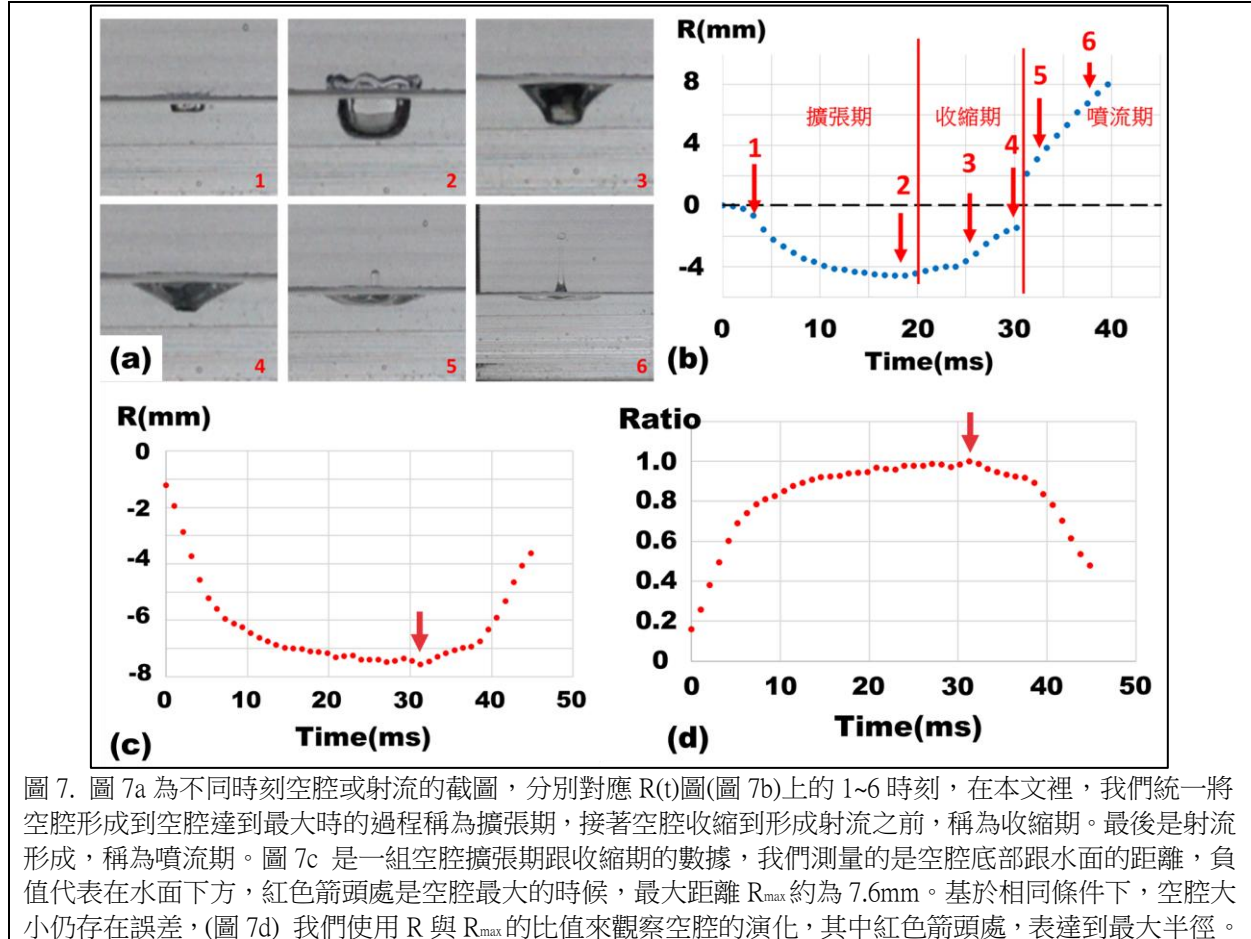
本研究使用 Tracker 紀錄空腔與射流的變化，見圖 6a & 6b，以水面為 X 軸，水滴碰觸水面的位置為原點(黃點)，因為水滴滴落後，會在滴落處形成空腔再進一步形成射流，因此我們標定每格畫面中，空腔底部與射流頂部的位置，以觀察此點的運動。符號 R 代表空腔(或噴流)跟水面的距離，水面下取負值，水面上取正值。考慮到標記的隨機誤差，我們連同老師三人，每人重複標定 5 組共 15 組，最終得到 R 的平均值與時間的關係(見圖 6c)。15 次取樣，在不同的時間點的 R 的標準差為平均值的 2~8%，其中以空腔剛形成的時刻與空腔擴張到最大的時刻，取樣較為分散，原因是這個階段的空腔大小變化相當緩慢，但是空腔表面會有擾動，所以 R 值在此取值不穩定。我們有嘗試以此數據再進一步分析速率關係，但因為照片的幀數不夠，速率分析的誤差很大，故本研究還是以 $R(t)$ 圖表為主，速率資訊則透過比較 $R(t)$ 的斜率來取得。最後我們與第一篇論文(Berberović, van Hinsberg, Jakirlić, Roisman, & Tropea, 2009)進行比較，在條件相近的實驗上，空腔的演化大致相同，這說明我們的數據具有一定的可靠度。



肆、研究結果與討論

一、空腔的生命週期

我們的主要目標是探討水深對空腔演化的影響，從文獻(Berberović, van Hinsberg, Jakirlić, Roisman, & Tropea, 2009)得知，水滴高度、液體種類與液體深度皆會影響，所以我們先進行初步的試作，以確認拍攝條件的設定。圖 7a 是空腔演化過程的截圖，分別對應



到圖 7b 中的不同時刻(紅色箭頭與數字標記)，我們發現由於條件不同，空腔大小各有不同，但是過程相似，為了讓組員間的用詞一致，我們把整個過程分為三個部分(見圖 7b)，擴張期、收縮期與噴流期。在擴張期內，水滴落下的衝擊力會使得空腔向水面下擴張，此時水的作用力會使得空腔的擴張，因為表面張力的作用，空腔擴張會開始減速，並達到空腔的最大半徑 $R_{\max}$ 。在收縮期內，表面張力開始收縮空腔，然後在噴流期將空腔中央底部的水流向上噴射，形成沃辛頓射流。不同的液體，由於表面張力不同，也會影響空腔的演化，基於研究主軸為干預空腔的演化，我們統一使用自來水。經過幾次初步的測試，我們發現水滴落下的高度與水深都會顯著影響擴張期與收縮期的時間，也觀察到容器底部會壓迫空腔，與第一篇論文的結果(Berberović, van Hinsberg, Jakirlić, Roisman, & Tropea, 2009)相呼應。

為了探究空腔形變程度對空腔演化的影響，我們透過在水缸底部放置壓克力片改變水的深度，讓空腔受到容器底部不同程度的壓迫。考慮到不同水深的空腔大小可能不同，為使收縮期、擴張期的時間判讀較為容易，我們定義空腔半徑與空腔半徑最大值的比值 Ratio：

$$Ratio = \left| \frac{R}{R_{\max}} \right| \quad (\text{Ratio}=1 \text{ 時空腔擴張至最大})$$

R 是空腔半徑(從空腔底部算到水面，未被壓迫前，空腔近似於半球型)， $R_{\max}$ 是擴張期內最大的半徑。圖 7c，是一個受壓迫的空腔的 $R(t)$ 圖，大約在 30 ms 擴張至最大(紅色箭頭處)，圖 7d 則是轉換成 Ratio 與時間的關係，可以看到整個演化過程跟圖 7c 相同，只是因為取絕對值，所以皆為正數。0~30 ms，Ratio 數字越接近 1，代表空腔正在緩慢地擴張，30 ms 後 Ratio 急遽減少，這意味著空腔收縮得很快，Ratio 大約 0.4 左右，此時射流已經形成，但仍有部分空腔在水面下(如圖 7a 中編號 4 的圖片)。在圖 7d 中，我們從開始擴張起算，到紅色箭頭處的時間，稱為擴張期時間 TE ，紅色箭頭到形成射流之間的時間，稱為收縮期時間 TC ，圖 7d 為例， TE 為 32 ms， TC 為 13 ms。

二、水深的影響

見圖 8a，由於相機的校正相當耗時，我們為了不改變水缸水面高度，我們透過放置壓克力片來調控，水滴滴落處的水深，水滴落水高度約為 25 cm，落水後形成空腔的大小約為 9 mm。見圖 8b，當水深在 13~28 mm，空腔的擴張和收縮的時間(TE & TC)相近，大致為 20 ms，我們也觀察到，水深 13~28 mm 間，空腔並沒有受到壓迫，整體仍是半球型。

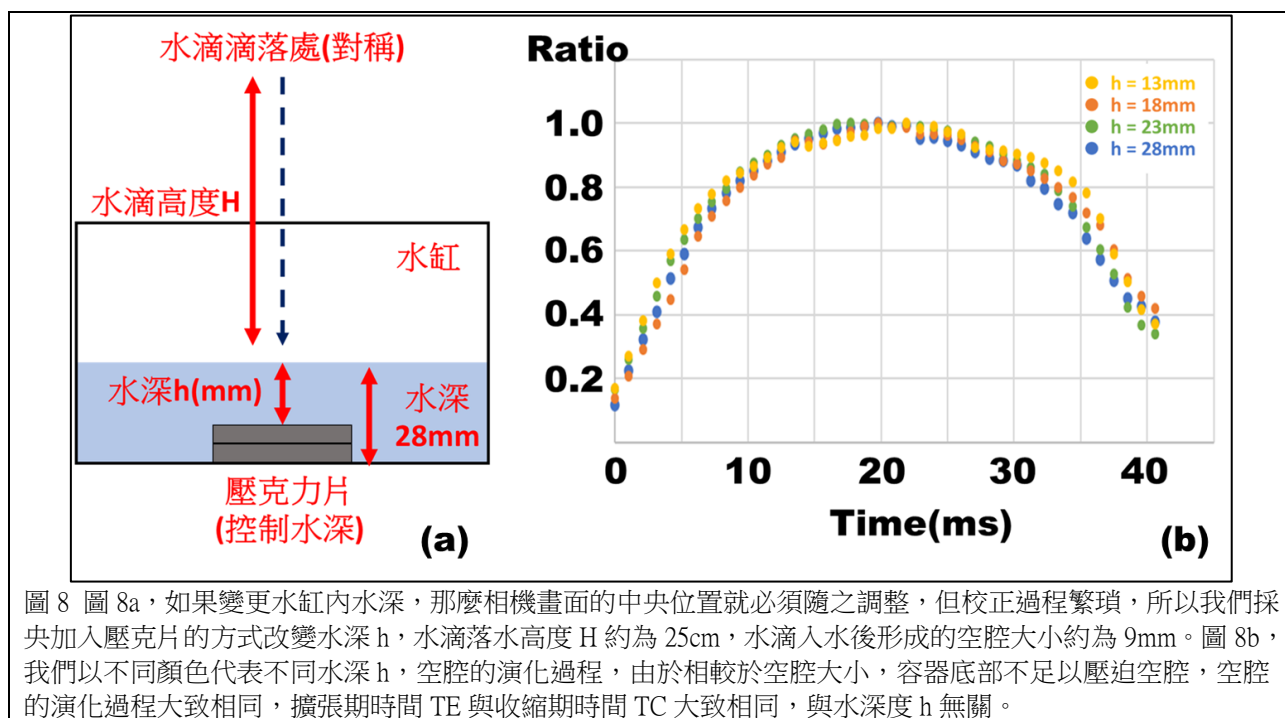


圖 8 圖 8a，如果變更水缸內水深，那麼相機畫面的中央位置就必須隨之調整，但校正過程繁瑣，所以我們採中央加入壓克力片的方式改變水深 h ，水滴落水高度 H 約為 25cm，水滴入水後形成的空腔大小約為 9mm。圖 8b，我們以不同顏色代表不同水深 h ，空腔的演化過程，由於相較於空腔大小，容器底部不足以壓迫空腔，空腔的演化過程大致相同，擴張期時間 TE 與收縮期時間 TC 大致相同，與水深度 h 無關。

然而，當水深為 8mm 時，空腔的形態有明顯的差異。圖 9a 是空腔演化過程，紅色框內為水深 8mm 的空腔，藍色框內水深 28mm 的空腔，由於容器底部的壓迫，水深 8mm 的空腔最大半徑為 8mm，水深 28mm 的空腔最大半徑則約為 10mm。相較於水深 28mm 的空腔，水深 8mm 的空腔明顯被壓縮，空腔底部在收縮過程轉變為圓柱形，可以看到水深 8mm 的空腔收縮時間較長，水深 28mm 的空腔先收縮結束形成射流。

為易於比較兩者差異，我們將水深 8mm 和水深 28mm 的空腔底部演化過程繪成圖 9b，擴張期時間 TE、收縮期時間 TC，用不同的顏色和下標數字分別代表不同水深 h 的數據(紅色 8mm，藍色 28mm)。在淺水深($h=8\text{mm}$)時和深水深($h=28\text{mm}$)時相比，擴張期減速的加速度小，擴張期時間 TE 變長，而收縮期加速度大，收縮期時間 TC 變短。其中淺水深($h=8\text{mm}$) 在 38 ms 的時刻，收縮速率突然加劇(斜率大增)，但仍是落後深水深($h=28\text{mm}$)的空腔，較晚形成射流。上述可總結兩個重點，一是當水深足夠淺時(小於空腔大小)，壓迫空腔改變形狀時，才會影響到空腔的收縮與擴張。二是淺水深的數據比起深水深的數據，擴張期減速的加速度較小與收縮期加速度皆較大。

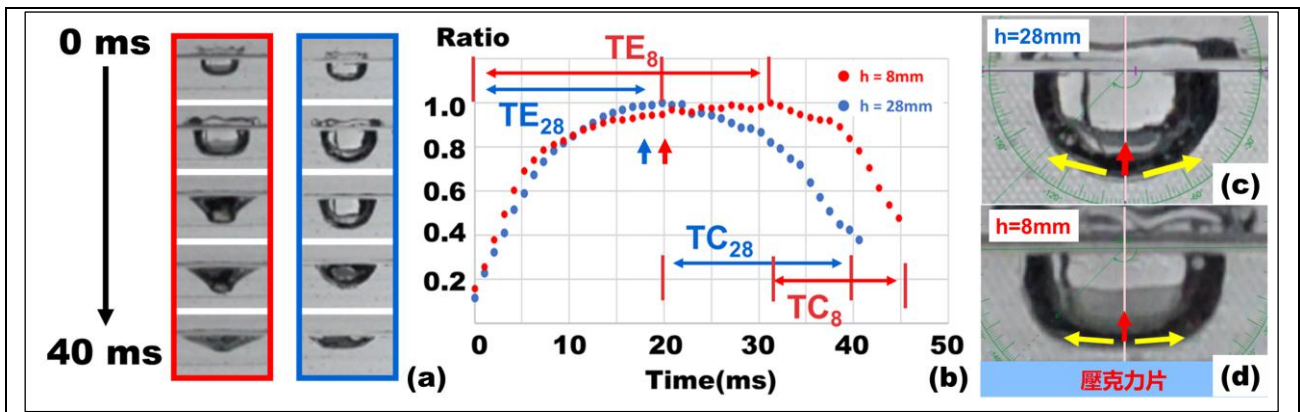


圖 9. 淺水深與深水深的空腔演化比較。9a 是空腔演化過程，紅框代表水深 8mm 的空腔，藍框代表水深 28mm 的空腔，可以看到水深 28mm 的空腔，過程中大致保持半圓形，但是 8mm 的空腔則收縮成圓柱形。9b. 我們取空腔中央底部的位置，來比較不同水深下的空腔演化過程，可以看到水深 8mm 的空腔擴張時間較長，收縮時間較短。9c 為圖 9b 中藍色箭頭處的時刻，水深 28mm 的空腔圖片，底部彎曲程度較大，表面張力合力較大，加速度較大，使得擴張較早結束。9d. 為圖 9b 中紅色箭頭處的時刻，水深 8mm 的空腔圖片，底部較為扁平，表面張力合力較小，加速度較小，使得擴張期較晚結束，延後開始收縮。

三、空腔的形變

究竟是什麼因素影響空腔的擴張和收縮？帶著這樣的疑問，我們仔細觀察空腔的變化。在觀察後發現，淺水深($h=8\text{mm}$)的空腔因受到壓克力片的阻擋，底部無法繼續擴張，因而較深水深($h=28\text{mm}$)的空腔底部扁平，半徑也更小，我們猜測變形程度不同，會導致收縮加速的程度有差異。

在空腔的擴張和收縮過程中，表面張力是主要的作用力之一，而表面張力會沿著表面施力，若表面的彎曲程度越大，兩側的表面張力夾角越小，合力就越大。因此，空腔的形狀會影響合力的方向與大小，進而影響空腔的收縮。見圖 9c 與圖 9d 中的兩個空腔為例，黃色箭頭代表張力方向，紅色箭頭代表合力方向，圖 9d 淺水深($h=8\text{mm}$)的空腔底部扁平，表面張力往兩側的施力夾角近乎 180° ，導致合力幾乎為 0，加速度較小；而圖 9c 深水深($h=28\text{mm}$)的空腔底部為半圓形，表面張力向兩側施力的夾角較小，代表向上合力較大，加速度較大。在擴張期，加速度方向與擴張方向相反，所以加速度較小，意味著需要更長的時間才能停止，因此相較於深水深，淺水深的空腔擴張期的減速程度較小，所以在圖 9b，淺水深的擴張期時間 TE 較深水深長。

圖 10a 上方照片，是深水深的空腔，因空腔形狀接近半圓形，各處的彎曲程度相近，所以合力相近，各部分的收縮速率差異不大，能夠維持半圓形。圖 10a 中間照片，是淺水深的空腔，因底部較為扁平，導致中心向左 45° 的位置表面的彎曲程度更大，產生更大的合力，會比空腔底部更快收縮。為了驗證猜想，見圖 10a 下方照片，我們分別在以空腔的中心線向左 0° (代表空腔底部)、 30° 、 45° 處取樣，測量淺水深($h=8\text{mm}$)及深水深($h=28\text{mm}$)時，空腔各處的收縮情況。如果猜想正確，淺水深的空腔，越接近底部的位置 (0°) 擴張期時間越長，不同位置擴張期時間不同，而深水深的空腔各處的擴張期時間應該大致相同。

水滴高度統一為 25cm ，紅綠藍三色分別代表， 45° 、 30° 、 0° 三個位置，測量的結果如同猜想，見圖 10b，深水深($h=28\text{mm}$)時，半圓形的空腔因為各處合力相近，所以各處的擴張期與收縮期時間差不多。反觀圖 10c， 45° 位置的合力最大，擴張期時間最短，最早收縮空腔，空腔底部 (30° & 0°) 則因為容器底部擠壓合力較小，擴張期時間較長、較晚收縮空腔，綜上所述，容器底部擠壓空腔，空腔形變改變收縮速率。

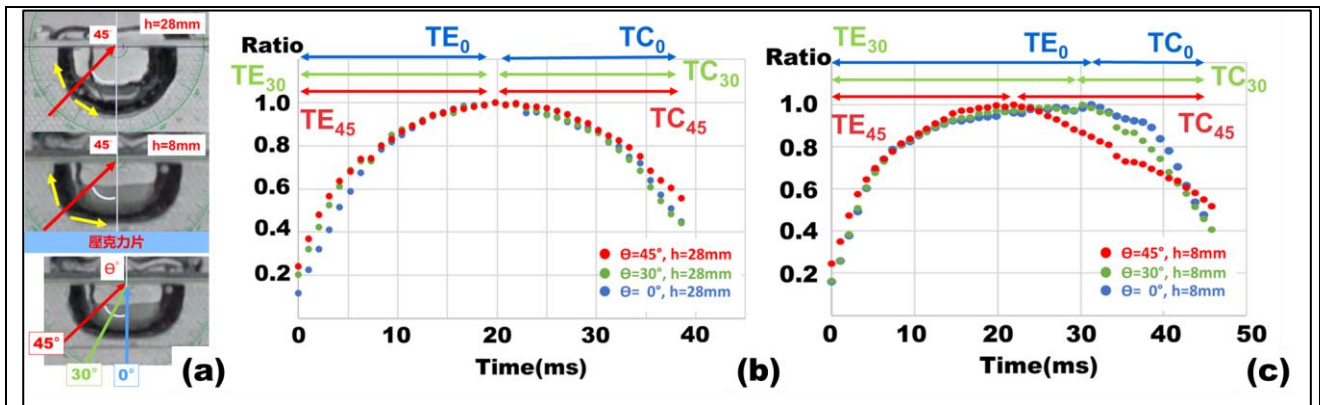


圖 10. 10a 上方照片，是深水深($h=28\text{mm}$)的空腔，可以看到空腔表面各處的弧度大致相同，表面張力合力大小相近，收縮速率相當。10a 中間照片，是淺水深($h=8\text{mm}$)的空腔，底部受到壓迫較為扁平，中心向左 45 度角的位置，空腔表面弧度較大，表面張力合力較大，我們推測此處收縮速率較其他位置快。10a 下方照片，為驗證猜想正確，我們針對深水深空腔與淺水深空腔不同位置，紀錄空腔演化過程，從中央底部起算，分別是 0 度、30 度、45 度三個位置。紅、綠、藍分別代表 45°、30°、0° 三個位置，TE 代表擴張期時間，TC 代表收縮期時間，10b. 是水深 $h=28\text{mm}$ 的情況，空腔是一個半圓形，所以不同位置的收縮速率大致相同。10c. 由於空腔受到壓迫，中央底部較為扁平，45 度角的位置，空腔弧度較大，表面張力合力大，所以最早開始收縮。

我們在測量過程中觀察到的一個現象，深水深的空腔因收縮均勻(見圖 11a)，擴張與收縮過程都能保持半圓形，但是淺水深的空腔，因為不同位置收縮速率不同，圖 11b 中的紅色與藍色箭頭代表收縮方向，箭頭長度代表收縮速率)，使得空腔變成圓柱形，這樣會使底部的表面張力(黃色箭頭)的合力變更大(圖 11c)，而這也導致淺水深空腔，30°和 0° 位置在最後會快速收縮(虛線越陡峭，收縮速率越快)(參考圖 11d，圖 11a 的後半部放大圖)。

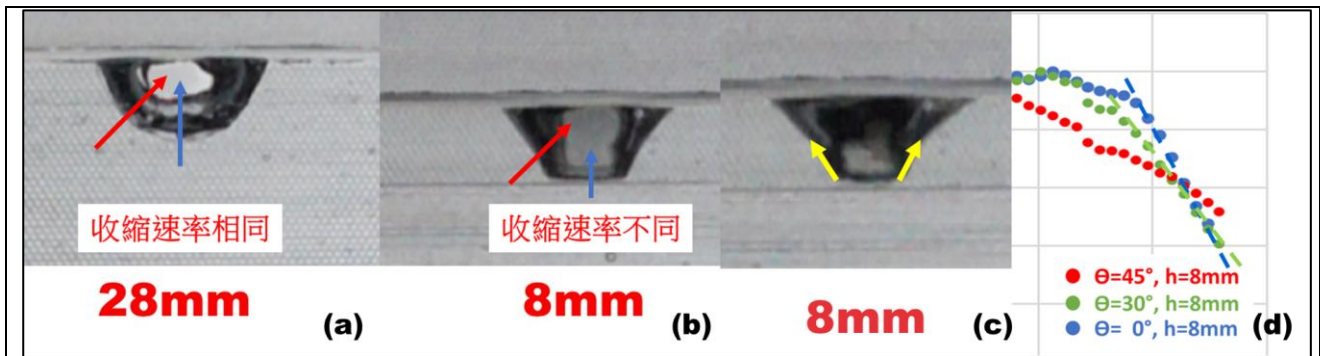


圖 11. 11a 表示水深 28mm 時，空腔上不同位置的收縮速率大致相同，能夠保持完美的半圓形。11b 在水深 8mm 時，由於 45°位置(紅線)收縮較 0°位置(藍線)快，使空腔變成圓柱形。11c 顯示，當空腔成為圓柱形，底部兩側的表面張力方向向上，使得底部合力大增，進一步加速底部收縮的速率。11d 是圖 10c 的右半部，可以看見代表空腔底部位置的線最為陡峭，這說明收縮速率最快。

五、不對稱邊界的噴流

既然空腔的形狀會對空腔的擴張和收縮造成影響，使水滴落在不同水深的交界處，會產生什麼結果？我們通過在水缸底部放置壓克力板改變水深，如圖 12a，將水滴滴落在壓克力片的邊緣，左側為水深 8mm，右側為水深 28mm，使左右兩側的空腔形狀不對稱。如圖 12b，我們使用 Tracker 分別追蹤空腔中線以左(水深 8mm)和以右(水深 28mm)30°處的擴張及收縮狀態，並畫成圖 12c。圖 12c 中可以看到，空腔右側(紅線)較早收縮，而空腔左側(藍線)則較晚收縮，空腔右側收縮的量也較左側多，並且會較左側先到達空腔中央。

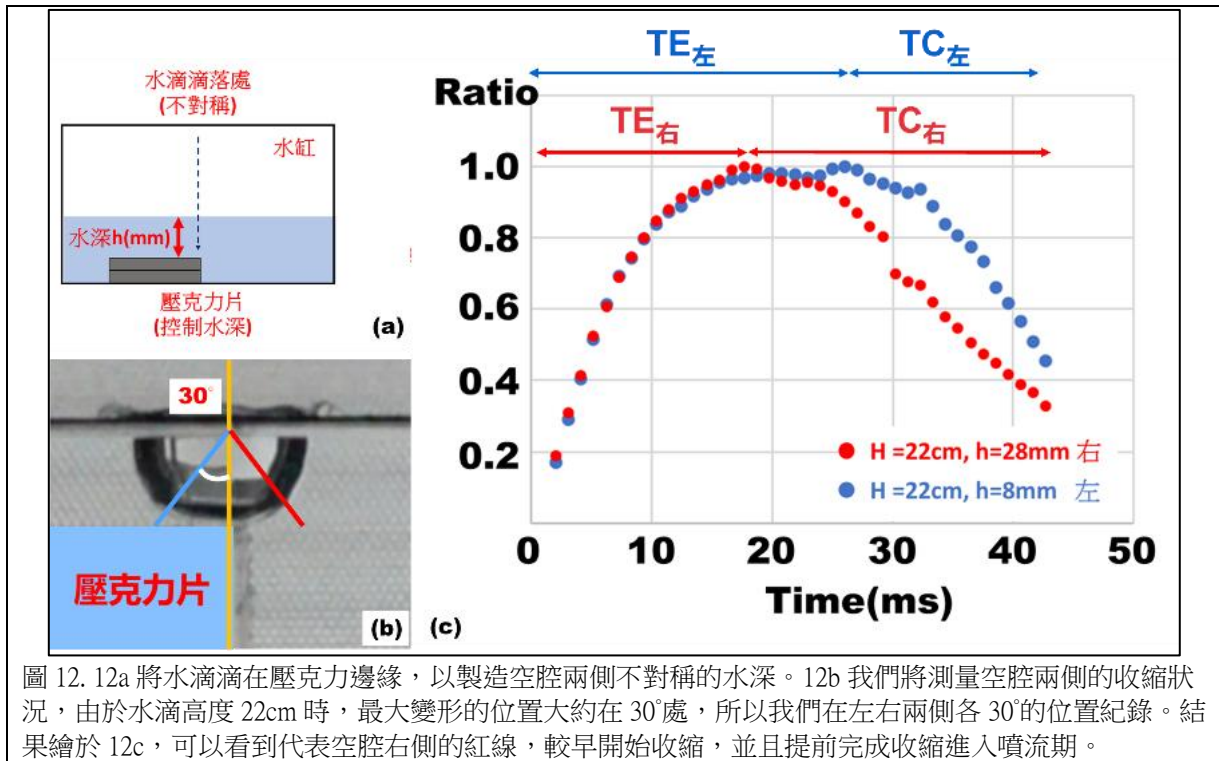


圖 12. 12a 將水滴滴在壓克力邊緣，以製造空腔兩側不對稱的水深。12b 我們將測量空腔兩側的收縮狀況，由於水滴高度 22cm 時，最大變形的的位置大約在 30°處，所以我們在左右兩側各 30°的位置紀錄。結果繪於 12c，可以看到代表空腔右側的紅線，較早開始收縮，並且提前完成收縮進入噴流期。

透過逐格畫面比對，我們認為由於收縮速率差異(見圖 13a)，右側空腔會較左側空腔先收縮到中央(圖 13b)，並且向上形成噴流，由於右側空腔的收縮方向朝向左上，使得噴流產生向左的速度(圖 13c)，當左側空腔也抵達中央時，噴流才開始向正上方射出。

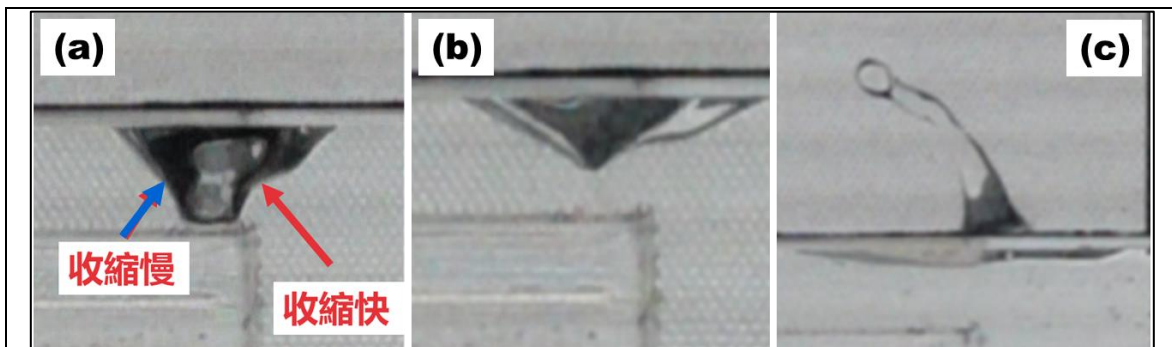
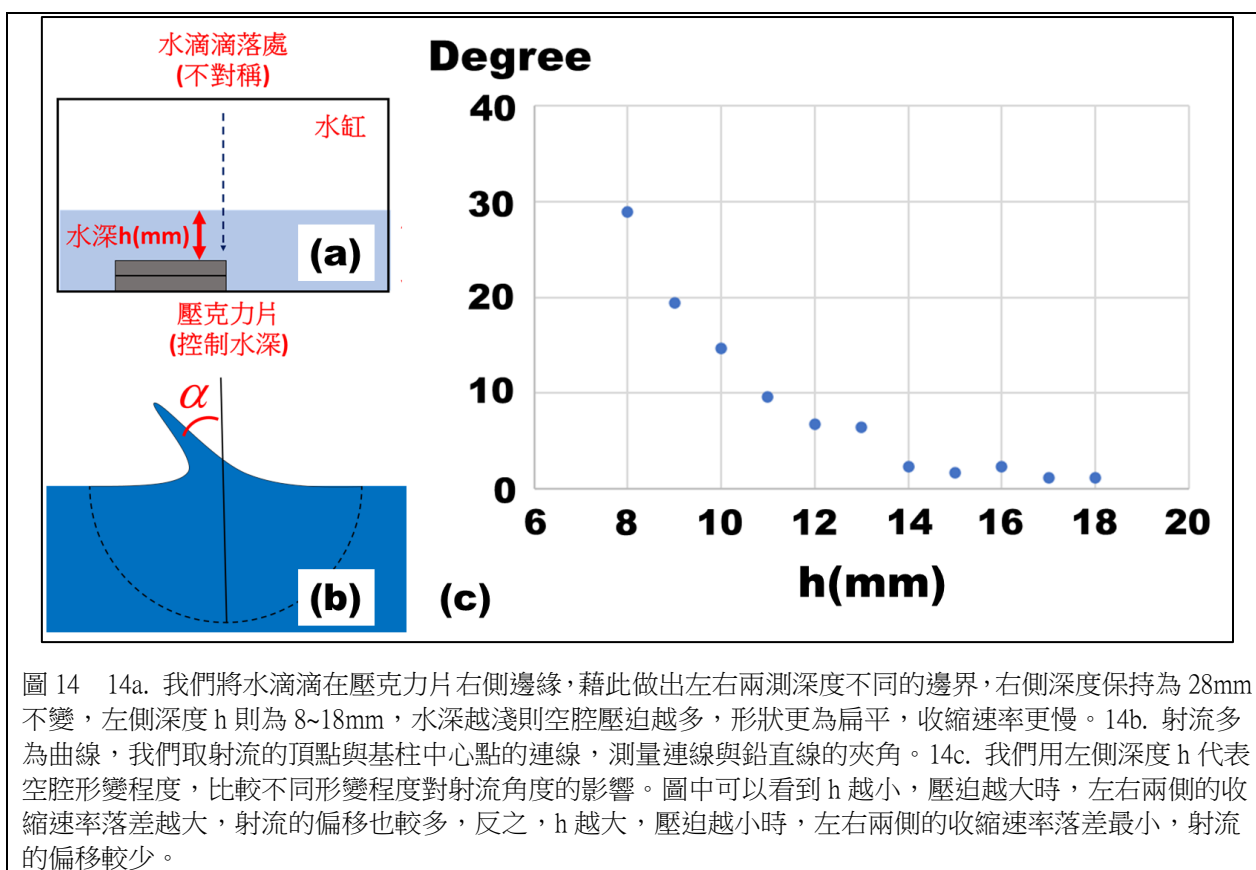


圖 13 a & 13b 代表不同時刻的空腔狀況，可以看到由於收縮速率不同，右側較快到達表面形成射流。13c 由於右側空腔先抵達中央形成射流，射流將會向左上方噴濺，直到左側空腔抵達中央，射流才逐漸回復到中線上，有趣的是在我們實驗的數據內，不論射流如何偏移，射流的根部都保持在中央。



由於空腔左右兩側收縮速率不同,導致右側先完成收縮形成射流,進一步使得射流向左偏移,這意味著只要加大左右兩側的收縮速率差,就能使得射流角度改變。我們控制左側水深 h ,來調控空腔形變的程度,水深 h 越小,代表左右兩側收縮速率差越大,實驗結果見於圖 14c。圖 14c 中射流皆為曲線,為方便比較,我們統一以射流頂點與射流基柱中心點的連線為準,以此連線測量射流夾角。可以發現 h 越小,兩側收縮速率差異越大,形成的射流偏移角度越大, h 大於 13mm 以後,由於空腔形變近乎為零,兩側收縮速率差異近乎零,於是射流的偏移角度也就幾乎為零了!

彙整實驗結果,我們認為空腔在邊界上,因為兩側擠壓變形的程度不同,導致左右兩側收縮時的加速度不同,最終使得右側先到達水面形成射流,由於右側的收縮方向是朝左上,因此形成的射流也帶有朝左上方的速度,於是射流向左傾斜。

六、局部形變與射流方向

根據我們的形變假說，只要在空腔表面造成不對稱的形變，即可使射流偏移，我們透過雷射切割機加工壓克力片，使壓克力片向空腔中心延伸，(見圖 15a)我們將這樣的構造稱為頂針，它會使半徑 8mm 的空腔向圓心方向凹陷 1mm。由於表面向外彎曲，此處相較於其他位置收縮速率最小，右側的空腔會先收縮完成形成射流，因此射流會向左傾斜。

圖 15b 是頂針角度 60 度的空腔演化過程，可以看到與頂針接觸的位置由於曲面向外，收縮速率較慢，使得右側先收縮完成形成射流，因此射流明顯偏向左側。15c~15f 則是不同頂針角度的空腔與射流，可以看到射流皆有不同程度的偏移，代表使用頂針干預局部空腔的收縮，改變射流的形成，是一個有效的方法。

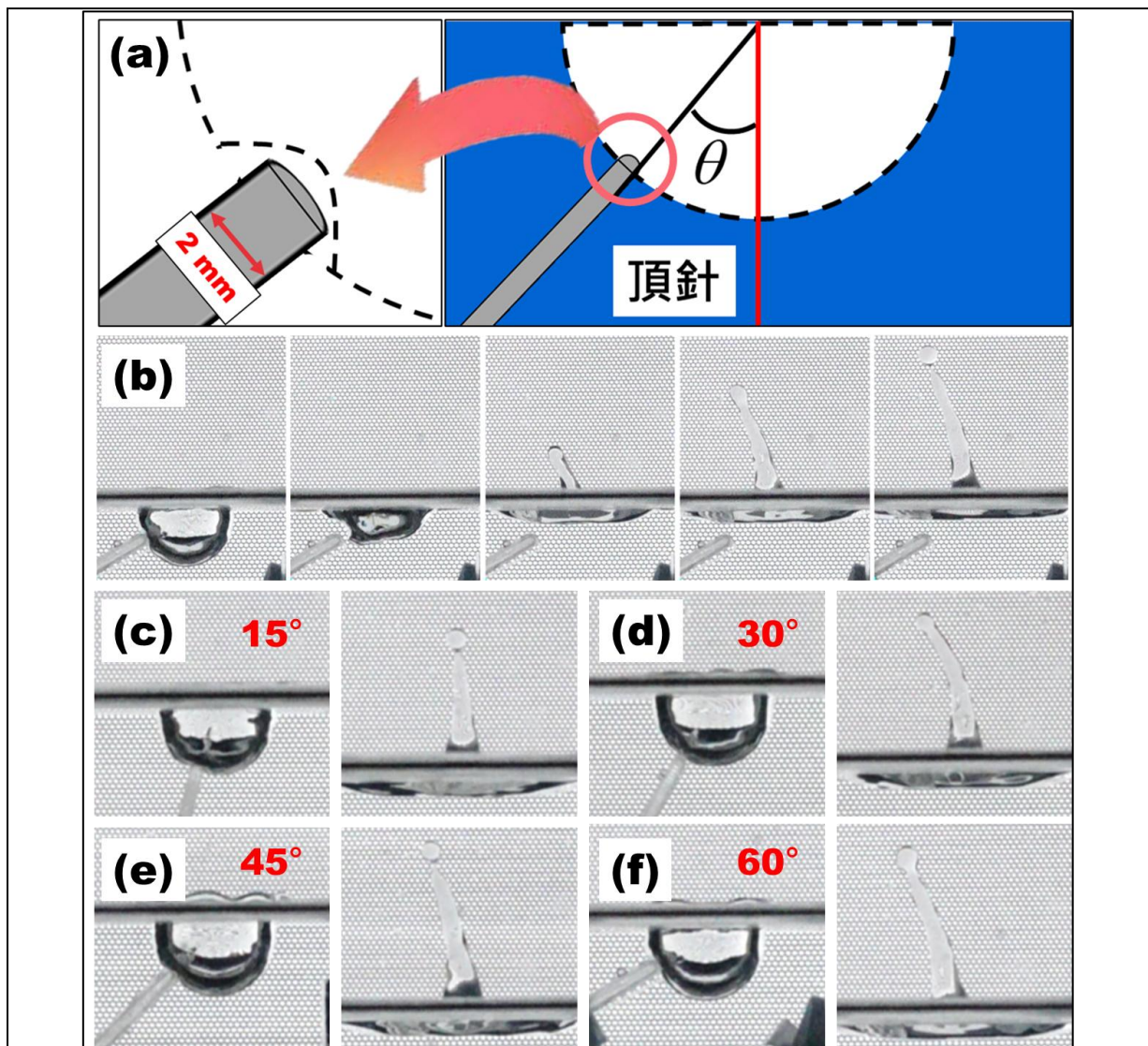
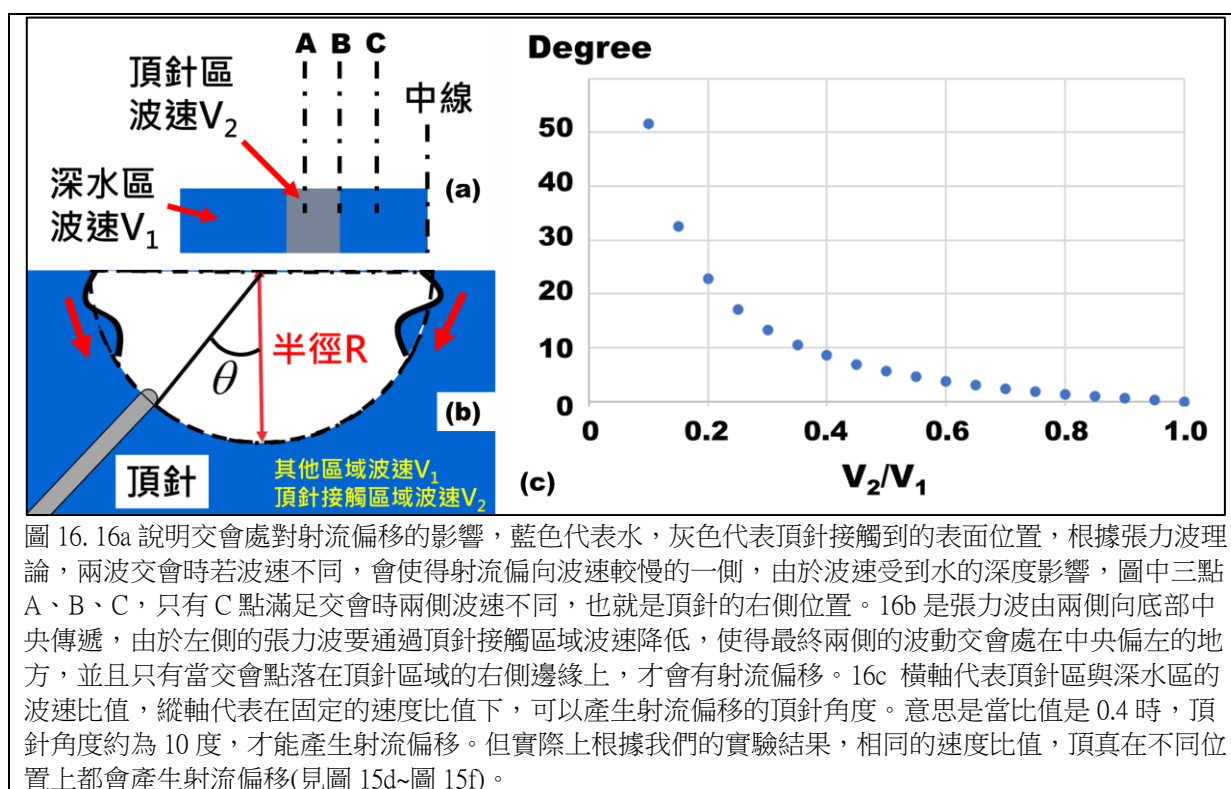


圖 15. 15a 我們使用雷射切割機切割壓克力片，自製頂針來造成空腔局部的形變，由於頂針會使空腔表面向外彎曲，意味著頂針接觸的位置，表面張力合力方向向外，會大幅減少此處收縮的速率。15b 是頂針角度 60 度時的空腔演化過程，可以看到與頂針接觸的地方，收縮速率最小，仍有部分緊貼頂針，右側則收縮的較快，因此射流明顯偏向左側。15c~15f，分別是不同的頂針角度的空腔與射流的照片，都可以看到收縮速率差異，使得射流偏移。因此透過頂針干預空腔局部的收縮，來調控射流偏移是可行的。

我們嘗試建立頂針位置與偏移角度的數學關係，但是由於空腔不是完美的半圓形，我們的頂針並不能精準地擊中預定位置，並且製造出相同程度的凹陷。再加上射流為彎曲的狀態，而且射流的形成是個持續過程，局部的不對稱收縮，只會反映在一部分的射流上，我們從圖 15d 上就能明確地看見，射流的前段較為彎曲，中後段的射流則較為筆直。所以尚找不到有效的數學公式可以描述，有待之後我們具備技術，能夠對整個空腔表面取樣，並與射流偏移相比較，以完善數學模型。

七、射流偏移的主要因素



根據前述論文(Lee, Shin, Choi, Jeon, Kim, & Kim, 2020)主張，張力波在空腔表面傳遞時，由於深度差異，波的傳遞速率不同。兩波交會後形成射流，基於動量守恆原理，射流會順著波速較快的波的運動方向偏移。在我們使用頂針產生射流的實驗中，只有頂針所在位置會壓迫空腔，其餘位置跟容器壁都超過 18mm，按照圖 14c 的結果所示，不會造成空腔變形。見圖 16a，張力波由空腔邊緣向中心傳遞，左側因為通過頂針區，傳遞速率下降，故左右側張力波交會處會在中線以左的位置上，若交會處在 A 點或 C 點上，由於兩側張力波波速相同，那麼根據動量守恆原理，射流不應該偏移。只有交會處在 B 點時，左側張力波波速較低，射流會向左偏移，這意味著只有頂針在特定角度上，才能導致射流偏移，並且由於速度差固定，射流偏移的角度也必須固定。

見圖 16b，張力波由兩側向空腔底部中央傳遞，我們假定深水區波速 V_1 ，頂針區波速 V_2 且 $V_1 > V_2$ ，頂針區寬度為 D_0 ，空腔半徑為 R ，兩波交會處為中線左側 X 的位置，則：

$$\frac{(\frac{1}{2}\pi R - X - D_0)}{V_1} + \frac{D_0}{V_2} = \frac{(\frac{1}{2}\pi R + X)}{V_1}$$

其中等式左邊為張力波由左側向交會處行進所需時間，等式右邊為張力波由右側向交會處行進所需時間。經過簡單的計算，我們可算出交會點跟空腔底部中央位置的距離 X ：

$$\Rightarrow X = \frac{D_0}{2} \cdot \left(\frac{V_1}{V_2} - 1 \right) = \frac{D_0}{2} \cdot \left(\frac{1}{V_2/V_1} - 1 \right)$$

因為張力波交會時，若速率不同會導致射流偏移，故交會處落在頂針區右側的邊緣上，才會產生射流偏移。若頂針跟空腔圓心連線與中線的夾角為 θ ，則 θ 與 X 的關係約為：

$$\theta(Deg) = \frac{X}{R} \times \frac{180}{\pi} = \frac{90 \cdot D_0}{\pi R} \left(\frac{1}{V_2/V_1} - 1 \right)$$

實驗中， D_0 為 1 mm、空腔半徑 R 的平均值為 8 mm，我們將結果製成圖 16c。圖 16c 的橫軸為 V_2 與 V_1 的比值，縱軸為交會處的角度，由於交會處同時也是頂針的位置，因此可以理解為頂針位置與速度比值的關係。速度比值越接近 1，要產生射流偏移，頂針位置就越接近空腔中央底部，在相同的實驗條件下，深水與淺水的波速比值固定，因此只有當頂針在特定位置上，才能產生射流的偏移。然而，我們的實驗結果顯示(圖 15d~圖 15f)，頂針位置不同會造成不同角度的射流偏移，而不是只在特定角度才有射流，這意味著張力波的波速差，並不是射流偏移的主因，空腔的形變才是。

伍、結論與未來工作

根據實驗結果，我們嘗試提出一個新的視角，用以分析空腔的演化。空腔的擴張與收縮由表面張力與液體壓力差主導，表面張力與空腔形狀相關，若能改變空腔形狀，即可調整表面張力的合力方向，進而影響空腔的擴張與收縮。

一、形變的影響

在實驗中，我們可以看見由於水深較淺，空腔底部受到容器壓迫變形，使得表面張力合力較小，因此擴張時加速度較小，擴張期時間延長，推遲收縮的時間點。同一因素也影響收縮期的加速程度，淺水深($h=8\text{mm}$)的空腔變形(見圖 17a、17b、17c)，導致空腔不同位置的表面彎曲程度不同，使得表面張力合力大小不同，兩側合力會大於底部合力，進而導致兩側先收縮，底部後收縮的情況。空腔會收縮成圓柱形，最終使得底部被加速，縮短收縮期時間。深水深($h=28\text{mm}$)則不同於淺水深數據，從圖 17d、17e、17f 可以看到不同位置收縮程度相當，整體保持半圓形，收縮期時間大致與擴張期時間相當。另外由於淺水深($h=8\text{mm}$)，空腔在收縮的最後階段變成圓柱形，表面張力合力增加後，會加速空腔底部的收縮，進而使得射流的初速較大。見圖 17g，我們將不同水深下產生的射流做比較，由於射流高度的會超出畫面，因此我們紀錄不同時間下，射流頂點在斷裂前的位置，並且比較兩組數據的斜率，來推估射流的速度大小，理論上有越大的速度，射流就能到達越大的高度，在圖中可以看到淺水深($h=8\text{mm}$ 紅色標記)相較於深水深($h=28\text{mm}$)更高，這意味著空腔形變與表面張力合力大小，對空腔的演化與射流的形成，有絕對的影響力。

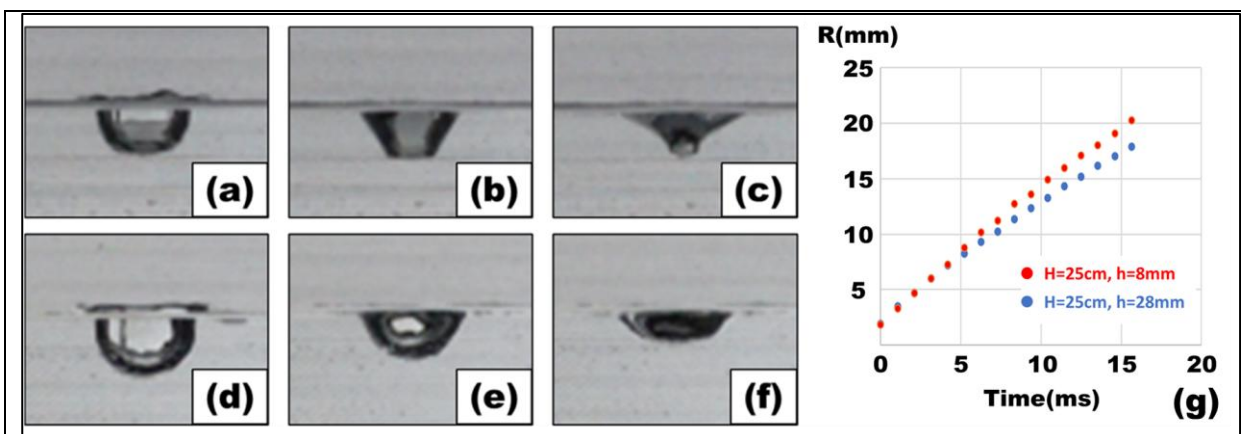


圖 17. 17a、17b、17c 為淺水深($h=8\text{mm}$)的影像，17a 到 17c 代表的是收縮期的過程，可以看到因為收縮速率的差異，使得空腔最終形成圓柱形。17d、17e、17f 為深水深($h=28\text{mm}$)的影像，17d 到 17f 代表的是收縮期的過程，由於收縮速率相近，空腔仍保持為半圓形。17g，由於淺水深($h=8\text{mm}$)空腔因收縮速率不均形成圓柱形，導致空腔中央底部收縮速率增加，形成更高的射流。

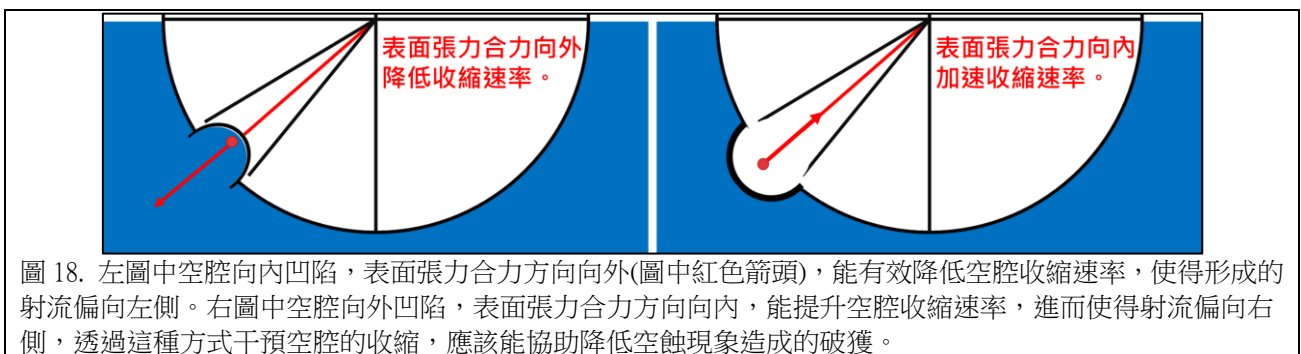
二、不對稱的影響

由於空腔的形變會影響表面張力合力，因此當空腔在壓克力邊緣形成時，淺水深的一側會導致較大的形變，表面張力合力減少，使得擴張期時間拉長收縮的時間點延後。深水深的一側，由於表面張力合力較大，擴張期時間較短，收縮的時間點較早，最終使得深水深一側的空腔先完成收縮並形成射流，由於左右不對稱，最終使得射流朝向一側傾斜。這個發現意味著只要能控制兩側收縮速率的差異，就能控制射流的噴濺方向與偏移角度。

三、干預空腔收縮與射流控制

我們使用頂針干預空腔局部的收縮速率，使空腔向內凹陷，凹陷處的表面張力合力與空腔收縮方向相反，這使得收縮速率大幅下降，進一步造成射流偏移，雖然因為控制與測量的精度不夠，無法建立有效的數學模型，(見圖 18)但改變空腔表面形狀來調控表面張力合力的作法，卻能帶來不少應用，譬如我們使空腔局部的彎曲程度增加，使表面張力合力方向與收縮方向一致，並且增加合力大小，這樣也能造成空腔收縮不均。

此技術或許可以用在降低空蝕現象的破壞上，空蝕是金屬件在流體中高速移動，因流速高壓力變小的特性，部分液體會汽化或液體中所溶氣體釋出，會在液體中形成大量的空腔(氣泡)，由於氣泡附著在金屬表面，根據我們的形變理論，氣泡與金屬接觸的一側較為扁平，收縮時的速率較慢，使得氣泡收縮結束後，夾帶的水流向金屬表面衝擊造成破壞，若能在金屬表面加工出多個細小凹槽，使得附著在金屬表面的氣泡彎曲程度增加，提高表面張力的合力，使得收縮速率提升，就可以使夾帶的水流向遠離金屬的一次流動，不會對表面形成衝擊。



四、射流偏移的主要因素

基於張力波理論的預測，只有干預收縮的頂針，落在特定位置上才能使射流偏移，我們透過實驗證實，不論頂針角度為何，都能產生射流的偏移。見圖 19a~19d，射流多為彎曲的，並且隨著時間，由大角度的偏移收斂至小角度偏移(視凹陷程度而定)。圖 19e 是頂針角度 75 度的實驗結果，我們取射流頂點與基柱中點連線為準，其連線與鉛直線的夾角隨時間增加而減少，最終收斂在 10 度左右。最終收斂的角度與頂針角度、空腔凹陷程度都有關，我們因實驗精度不足，尚無法有效量化，但都足以說明，射流的形成不是單次張力波의 交會可以解釋，它應該是空腔在不同時間點，兩側的收縮速率差異導致，因此張力波不是射流偏移的主因，收縮速率不均才是。

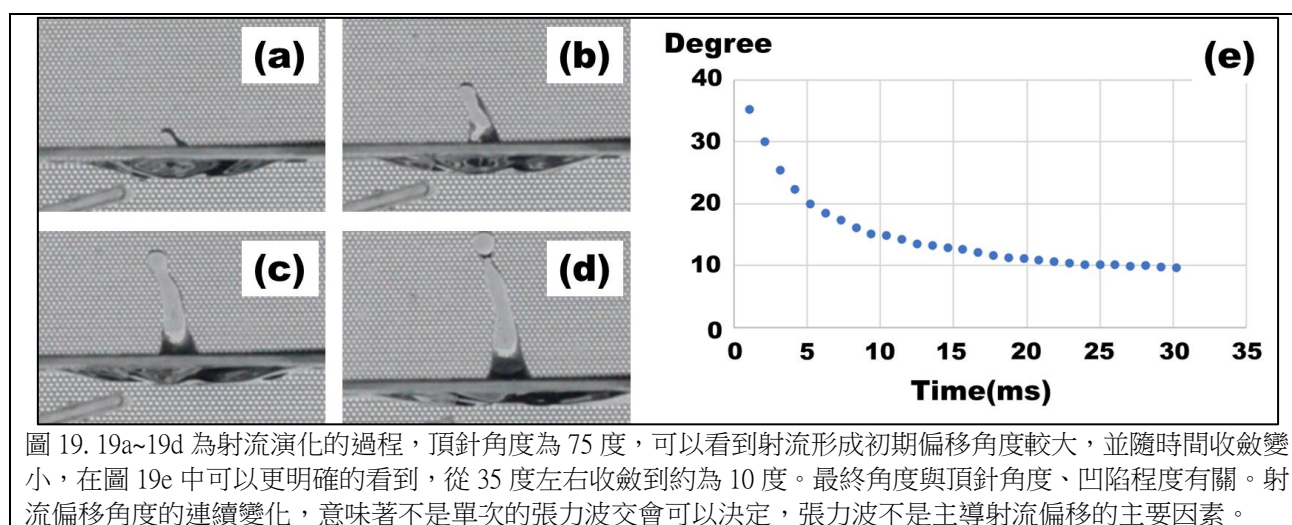


圖 19. 19a~19d 為射流演化的過程，頂針角度為 75 度，可以看到射流形成初期偏移角度較大，並隨時間收斂變小，在圖 19e 中可以更明確的看到，從 35 度左右收斂到約為 10 度。最終角度與頂針角度、凹陷程度有關。射流偏移角度的連續變化，意味著不是單次的張力波交會可以決定，張力波不是主導射流偏移的主要因素。

五、未來工作

我們的影像分析方式，雖能定性的說明空腔形變與收縮的關係，但仍舊不夠直接，我們期待未來能透過影像辨識的 AI，來協助我們測繪空腔的形狀，這樣就能建立表面彎曲程度與表面收縮速率的關係，能提供更直接的解釋。再者我們也想嘗試使用干預空腔收縮的技術，去控制氣泡在液體中收縮的過程，如果能夠成功，那就能有效降低空蝕現象對金屬表面的破壞。

註；全文圖片皆為作者群與指導老師合作完成，圖 2 是依照 Lee, Y., Shin, S., Choi, G., Jeon, H., Kim, Y., & Kim, H. (2020).一文的說明圖示重製。

陸、參考文獻資料

1. 謝承憲、林意勳、林芷卉、廖彥睿、吳政穎、張馨文 (2013)。深水炸彈~探究撞擊波對水體與浮球之力學交互作用。發表於中華民國第 63 屆中小學科學展覽會(國小組 物理科 第二名)，新北市中和區積穗國民小學。
2. 王昱權、陳御章、王昊恩、沈驗、王相川 (2013)。水花的減緩者。發表於中華民國第 63 屆中小學科學展覽會 (國中組 物理科 第三名)，屏東縣立明正國民中學。
3. 林紫彤、張祐薰、陳可芯、董心媛、陳宥仔、梁倚慈、韓順興 (2015)。接觸一瞬間~蠟油模擬液體碰撞實驗。發表於中華民國第 57 屆中小學科學展覽會 (國小組 物理科 佳作)，新竹縣私立康乃爾國民中小學。
4. Berberović, E., van Hinsberg, N. P., Jakirlić, S., Roisman, I. V., & Tropea, C. (2009). Drop impact onto a liquid layer of finite thickness: Dynamics of the cavity evolution. *Physical Review E*, 79(3), 036306.
5. Lee, Y., Shin, S., Choi, G., Jeon, H., Kim, Y., & Kim, H. (2020). Symmetry breaking of Worthington jets by gradients in liquid pool depth. **Physics of Fluids*, 32*(11), 112104.

【評語】 030107

本作品跳脫傳統對沃辛頓射流的研究框架，創新地以觀察水滴滴落液面瞬間所形成的空腔變化來探討並控制射流方向，展現出獨到的研究視角與科學創意。實驗設計細膩、觀察詳實，整體架構清晰且具邏輯性，呈現出一件完整且優秀的作品。未來若能進一步思考是否可藉由射流方向反推水面下的變化情形，或深入探討空腔直徑與水深之間的比值對射流形成的影響，將有助於強化本研究的物理解釋與應用價值，使整體研究更趨完整。這是一項兼具創意與深度探索的作品！

作品海報

湍辛頓射流控制術

不對稱邊界的影響

研究摘要 Abstract

沃辛頓射流是指物體掉入液體中後，在液體下形成空腔，經由表面張力的作用，空腔收縮並向上噴射的水流。瞭解射流機制與抑制射流引發的噴濺，在機械潤滑與公衛領域是重要的課題。本研究透過空腔與容器的交互作用，影響射流的形成，空腔形變會改變表面張力的合力方向，使得局部收縮速率不同，進而影響射流的高度與方向。透過改變空腔兩側形變的程度，我們可以有效控制射流偏移方向，本研究進一步透過自製頂針，讓空腔局部變形，藉此產生射流偏移，證實張力波並非射流偏移的主要因素。本研究的成果，為射流的研究提供一個新的觀點：空腔弧度大小決定收縮速率與方向，未來可藉此影響空腔收縮，協助科學家降低空蝕現象對機械的破壞。

文獻回顧 Literature Review

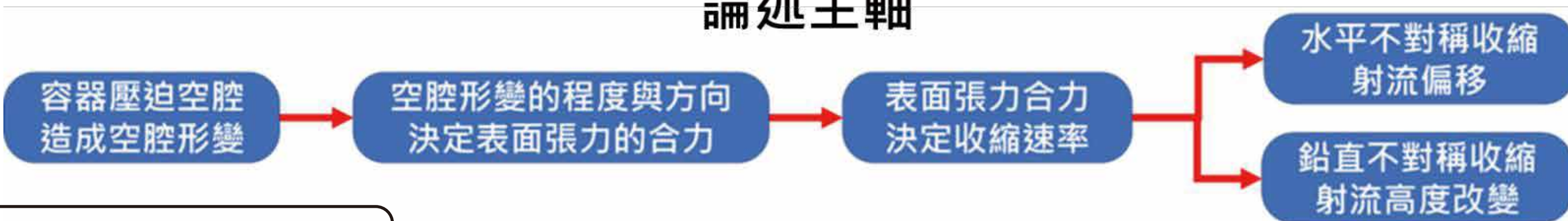
沃辛頓射流是由於物體掉落液面，在多種作用力的影響下，液面在回復原狀時，會在物體掉落處形成高約 20mm 左右的水柱(見圖 1)。這個過程中，掉落物在液面下形成空腔，空腔的收縮再進一步形成射流，因此空腔的演化是研究的主軸。

第一篇論文(Berberović, van Hinsberg, Jakirlić, Roisman, & Tropea, 2009)認為空腔在液體壓力、表面張力的作用下，經歷擴張與收縮。論文發現在空腔的表面上，有張力波由空腔邊緣的突起處向空腔底部傳遞，張力波會在空腔底部結合，進而產生沃辛頓射流。第二篇論文(Lee, Shin, Choi, Jeon, Kim, & Kim, 2020)在第一篇論文的基礎上，見圖 2a、2b、2c，由空腔兩側向底部傳播的張力波，由於左側的張力波貼近斜面水深較淺，張力波傳遞速率較慢，使得兩波交會處偏向空腔底部的左側，更由於右側向左側傳遞的波較快，當兩波相遇時，會產生向左運動的速率，導致射流偏向左側。然而，兩波交會時的速率應該相同(同一位置)，怎麼會導致射流有向左的速度？我們認為應當有其他更合理的解釋。

研究目的 Goal

1. 探討空腔形變與射流的關係。
2. 探討不對稱邊界對射流的影響。
3. 論證射流偏移的原因。

論述主軸



研究器材設定 Experimental Setup

一、相機角度與高度設定

目標：確保鏡頭軸線對準中央，並且軸線垂直水缸面(見圖 4)

1. 水平校準螺絲，確保水缸保持水平。
2. 使用微調升降台，使鏡頭軸線對齊水面。
3. 使用雷射輔助，確保鏡頭軸線垂直水缸正面

三、水滴控制與深淺控制設定

1. 設置距離參考尺，作為後續影片分析時的長度基準。(見圖 5)
2. 水滴的大小則使用固定口徑的滴管控制，水滴直徑約為 2.5 mm，使用軟管將 5ml 針筒與滴管連結，可使滴水時滴管不偏移。
3. 相機設定不易，我們透過添加壓克力片與抽水的方式，控制落水位置的水深。
4. 壓克力片為邊長 10cm 正方形，厚度 3mm，產生的空腔半徑都在 5~10 mm 左右，壓克力片的大小可以覆蓋整個空腔。

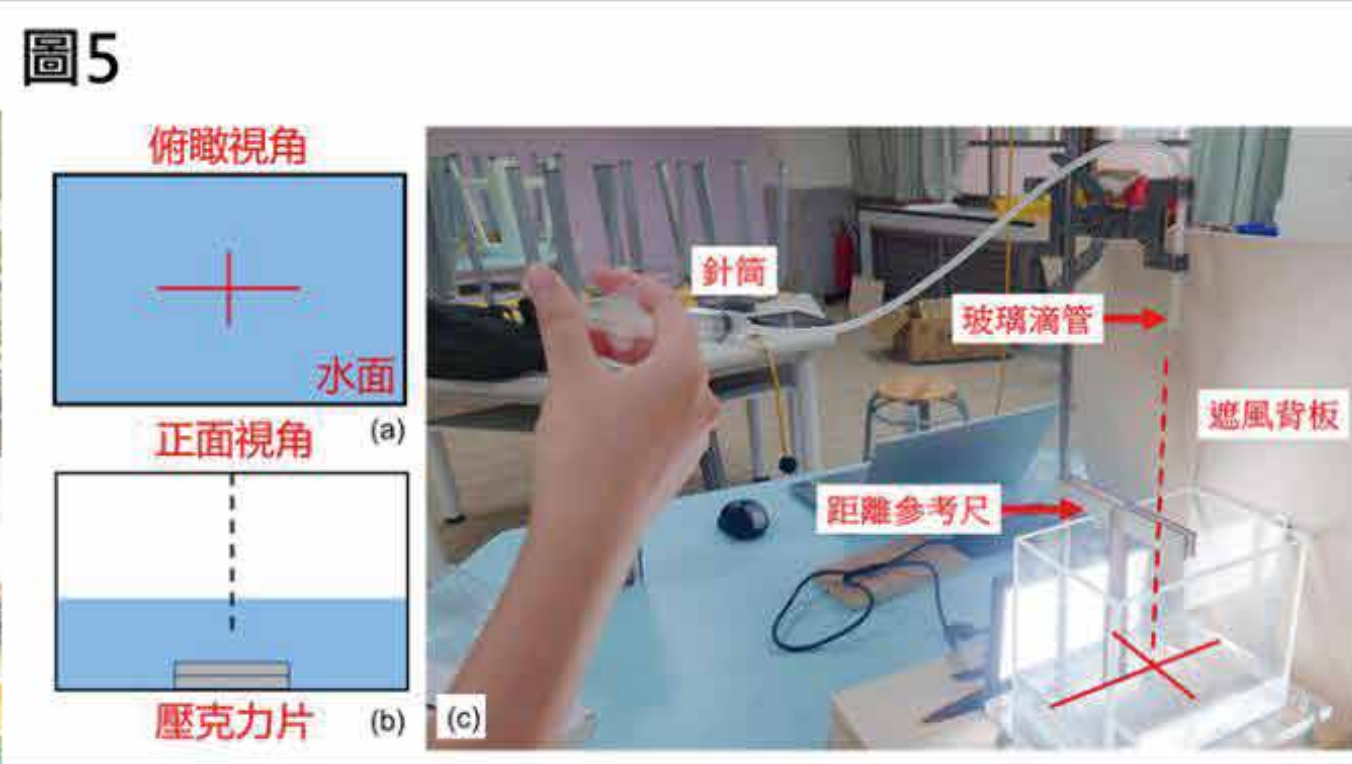
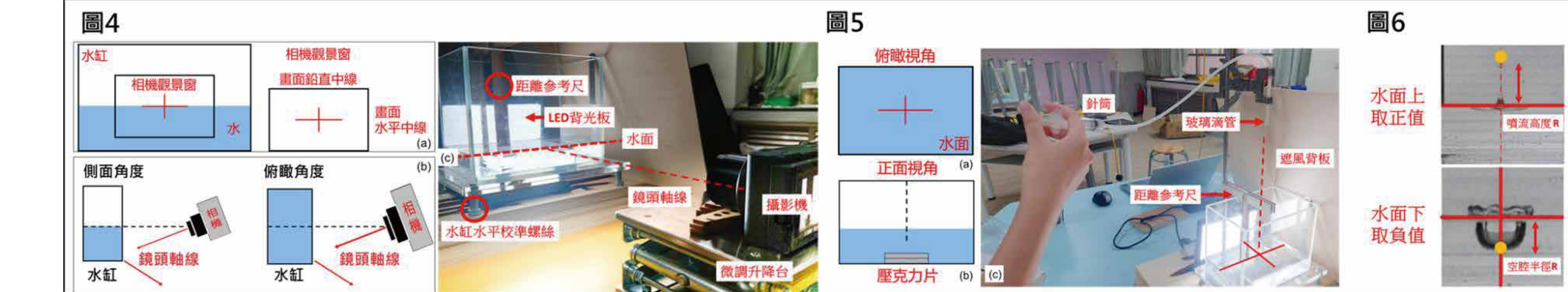
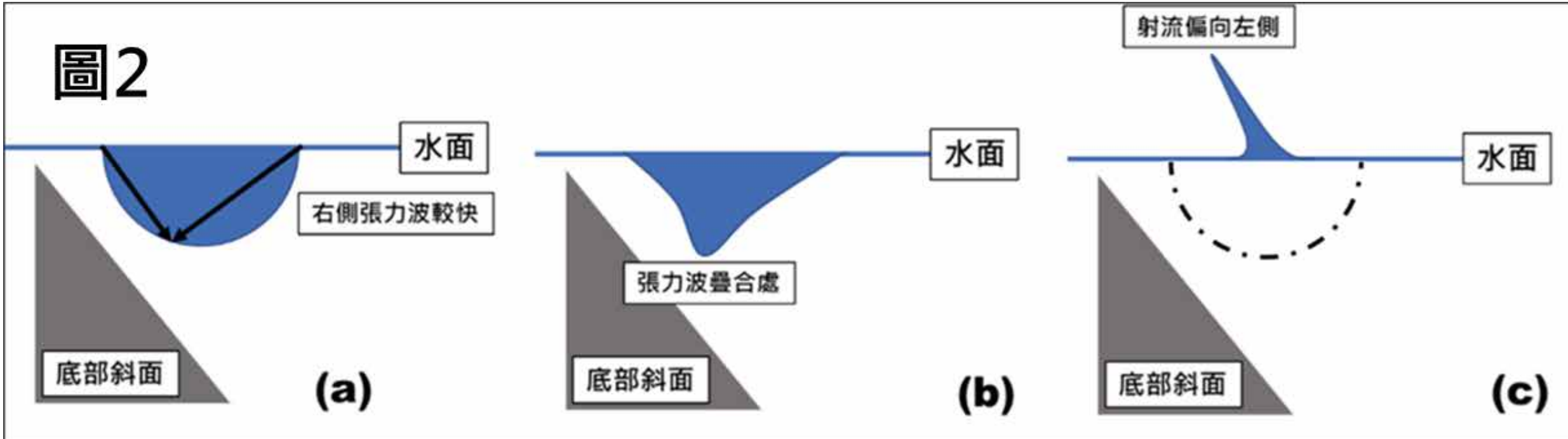
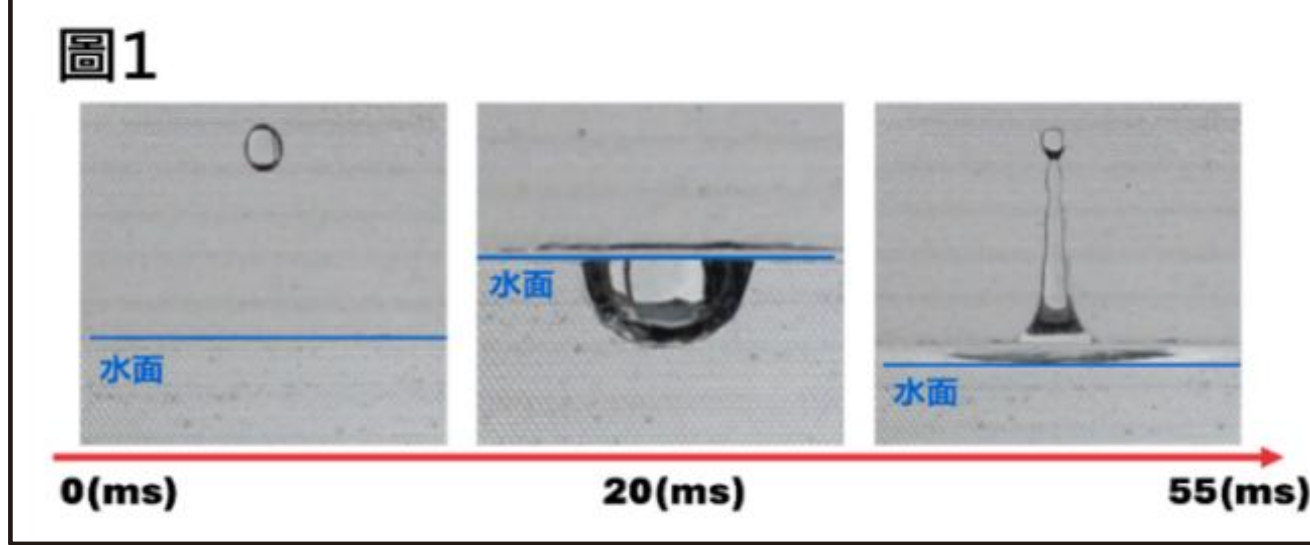
二、相機與補光設定

1. 影格速率為 960fps 的相機進行拍攝，整個過程約拍攝 48 張照片。
2. 由水缸背面補光由於折射的影響，空腔邊緣的光線會發散，與背光板相比亮度較低，讓邊緣的形狀更加清楚。

四、影像分析

本研究使用 Tracker 紀錄空腔與射流的變化，水滴碰觸水面的位置為原點(黃點)，標定每格畫面，空腔底部與射流頂部的位置，以觀察此點的運動(見圖 6)。

1. 符號 R 代表空腔(或噴流)跟水面的距離，水面下取負值，水面上取正值。
2. 考慮到標記的隨機誤差，我們連同老師三人，每人重複標定 5 組共 15 組，最終得到 R 的平均值與時間的關係。15 次取樣，在不同的時間點的 R 的標準差為平均值的 2~8%，其中以空腔剛形成的時刻與空腔擴張到最大的時刻，取樣較為分散。



研究成果與討論 Result & Discussion

一、空腔的生命週期

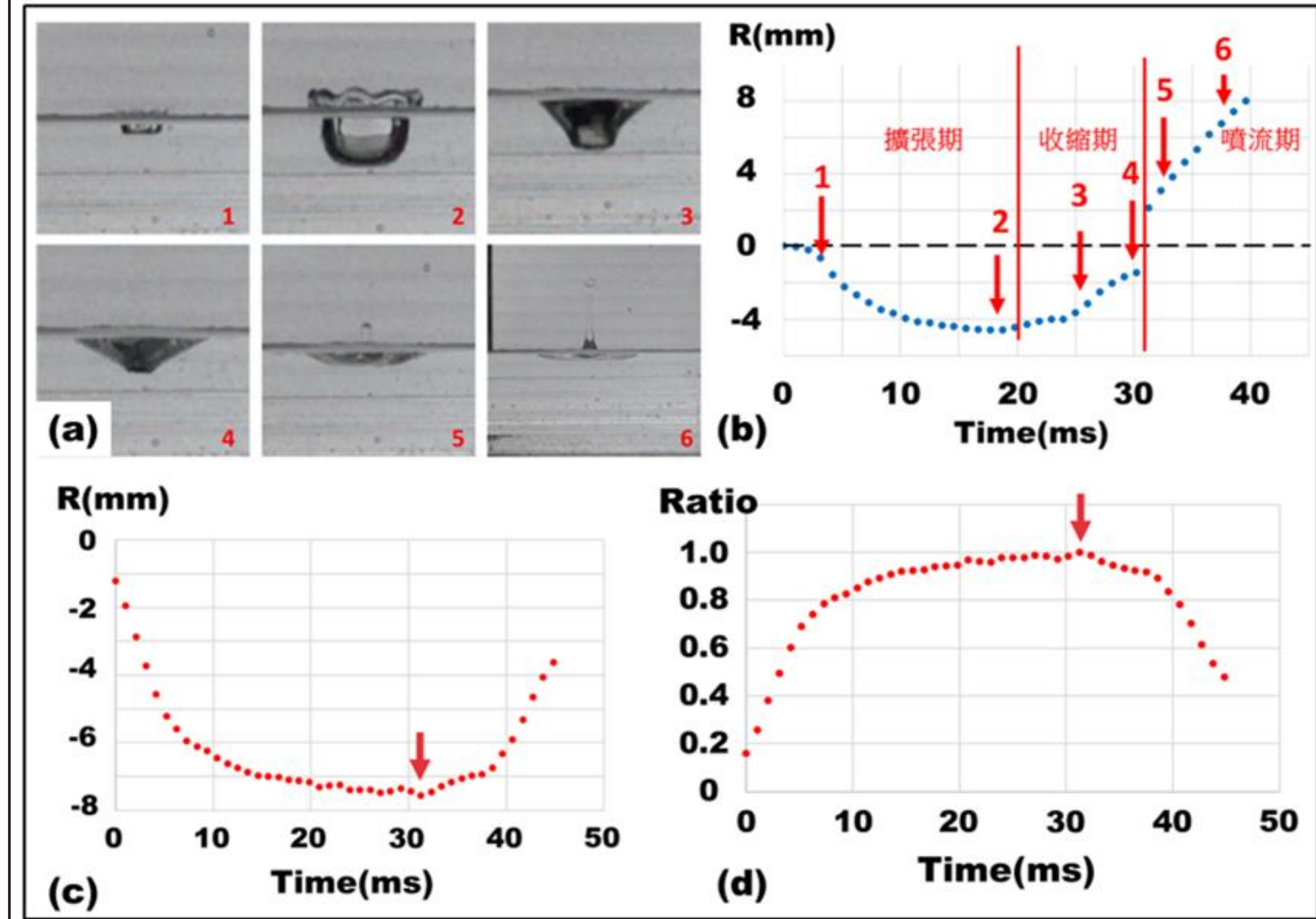
我們的主要目標是探討水深對空腔演化的影響，我們把整個過程分為三個部分，擴張期、收縮期與噴流期(見圖 7a & 7b)。在擴張期內，水滴落下的衝擊力會使得空腔向水面下擴張，此時水的作用力會使得空腔的擴張開始減速，並達到空腔的最大半徑 R_{max} 。在收縮期內，水的作用力開始收縮空腔，然後在噴流期形成沃辛頓射流。

考慮到不同水深的空腔大小可能不同，為使收縮期、擴張期的時間判讀較為容易，我們定義空腔半徑與空腔半徑最大值的比值 Ratio：

$$Ratio = \frac{R}{R_{max}} \quad (Ratio=1 \text{ 時空腔擴張至最大})$$

R 是空腔半徑(從空腔底部算到水面，未被壓迫前，空腔近似於半球型)， R_{max} 是擴張期內最大的半徑。圖 7c，是一個受壓迫的空腔的 R(t)圖，大約在 30 ms 擴張至最大(紅色箭頭處)，圖 7d 則是轉換成 Ratio 與時間的關係，可以看到整個演化過程跟圖 7c 相同。Ratio 大約 0.4 左右，此時射流已經形成，但仍有部分空腔在水面下(如圖 7a 中編號 4 的圖片)。在圖 7d 中，我們從開始擴張起算，到紅色箭頭處的時間，稱為擴張期時間 T_E ，紅色箭頭到形成射流之間的時間，稱為收縮期時間 T_C ，圖 7d 為例， T_E 為 32 ms， T_C 為 13 ms。

圖7



研究成果與討論 Result & Discussion

二、水深的影響

見圖 8a，由於相機的校正相當耗時，我們為了不改變水缸水面高度，我們透過放置壓克力片來操控，水滴滴落處的水深，水滴落水高度約為 25 cm，落水後形成空腔的大小約為 9 mm。見圖 8b，當水深在 13~28 mm，空腔的擴張和收縮的時間(TE & TC)相近，大致為 20 ms，我們也觀察到，水深 13~28 mm 間，空腔並沒有受到壓迫，整體仍是半球型。

然而，當水深為 8mm 時，空腔的形態有明顯的差異。圖 9a 是空腔演化過程，紅色框內為水深 8mm 的空腔，藍色框內水深 28mm 的空腔，由於容器底部的壓迫，水深 8mm 的空腔最大半徑為 8mm，水深 28mm 的空腔最大半徑則約為 10mm。相較於水深 28mm 的空腔，水深 8mm 的空腔明顯被壓縮，空腔底部在收縮過程轉變為圓柱形，可以看到水深 8mm 的空腔收縮時間較長，水深 28mm 的空腔先收縮結束形成射流。

為易於比較兩者差異，我們將水深 8mm 和水深 28mm 的空腔底部演化過程繪成圖 9b，擴張期時間 TE、收縮期時間 TC (紅色 8mm，藍色 28mm)。在淺水深(h=8mm)時和深水深(h=28mm)時相比，擴張期減速的加速度小，擴張期時間 TE 變長；收縮期加速度大，收縮期時間 TC 變短。其中淺水深(h=8mm)在 38 ms 的時刻，收縮速率突然加劇(斜率大增)，但仍是落後深水深(h=28mm)的空腔，較晚形成射流。綜上所述，相較於未壓迫的空腔，受到壓迫時(水深 8mm)，收縮加速度較小，擴張時間長，延後收縮，使得射流更晚形成。

三、空腔的形變

在空腔的擴張和收縮過程中，表面張力是主要的作用力之一，而表面張力會沿著表面施力，若表面的彎曲程度越大，兩側的表面張力夾角越小，合力就越大。因此，空腔的形狀會影響合力的方向與大小，進而影響空腔的收縮。見圖 9c 與圖 9d 中的兩個空腔為例，黃色箭頭代表張力方向，紅色箭頭代表合力方向，圖 9d 淺水(h=8mm)的空腔底部扁平，表面張力往兩側的施力夾角近乎 180 度，導致合力幾乎為 0，加速度較小；而圖 9c 深水(h=28mm)的空腔底部為半圓形，表面張力向兩側施力的夾角較小，代表向上合力較大，加速度較大。在擴張期，加速度方向與擴張方向相反，所以加速度較小，意味著需要更長的時間才能停止，因此相較於深水深，淺水深的空腔擴張期的減速程度較小，所以在圖 9b，淺水的擴張期時間 TE 較深水長。

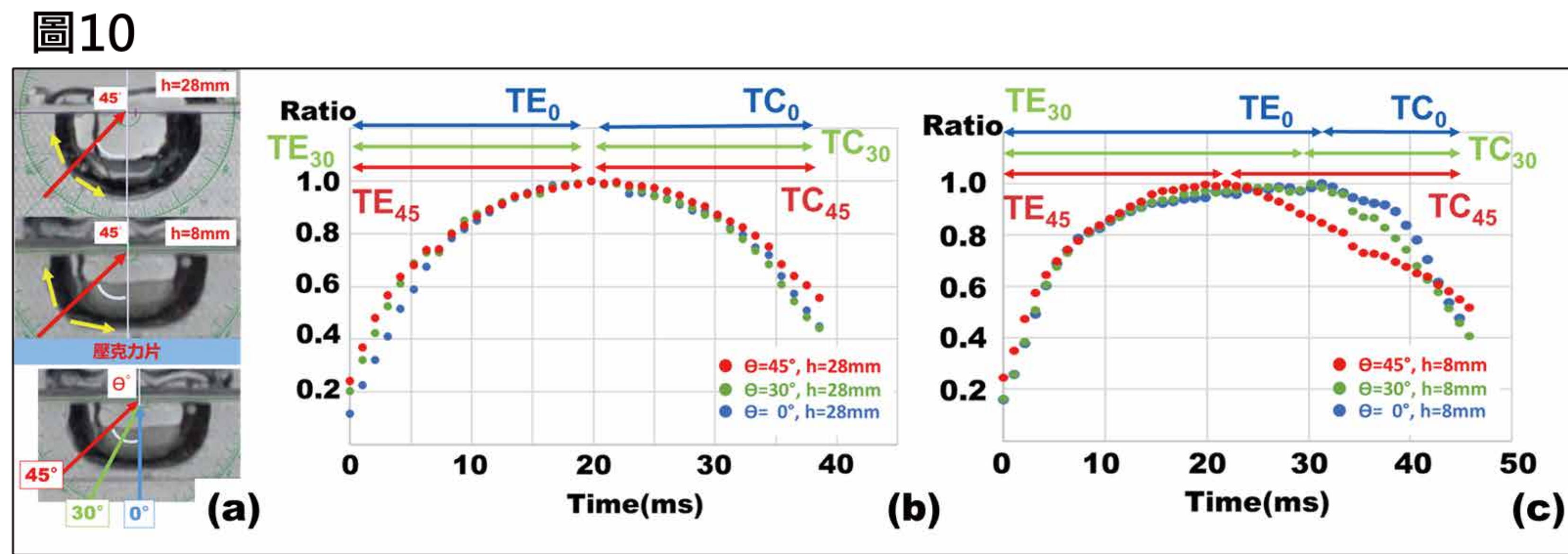
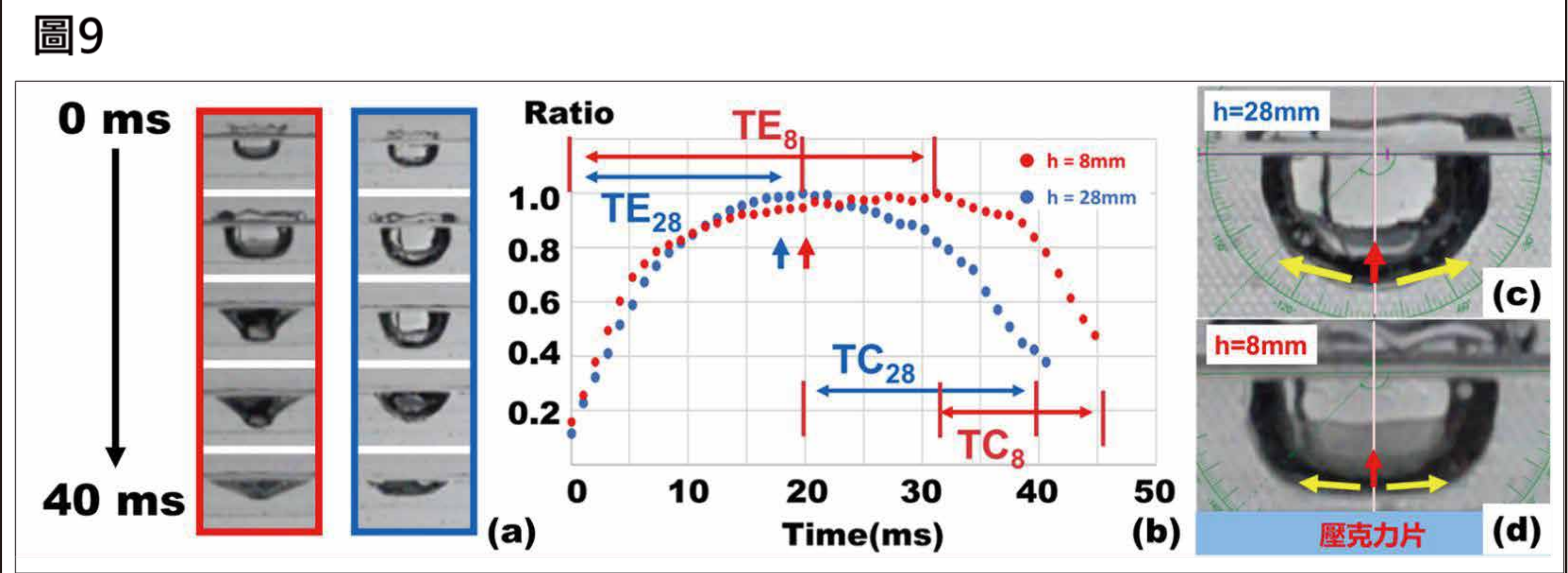
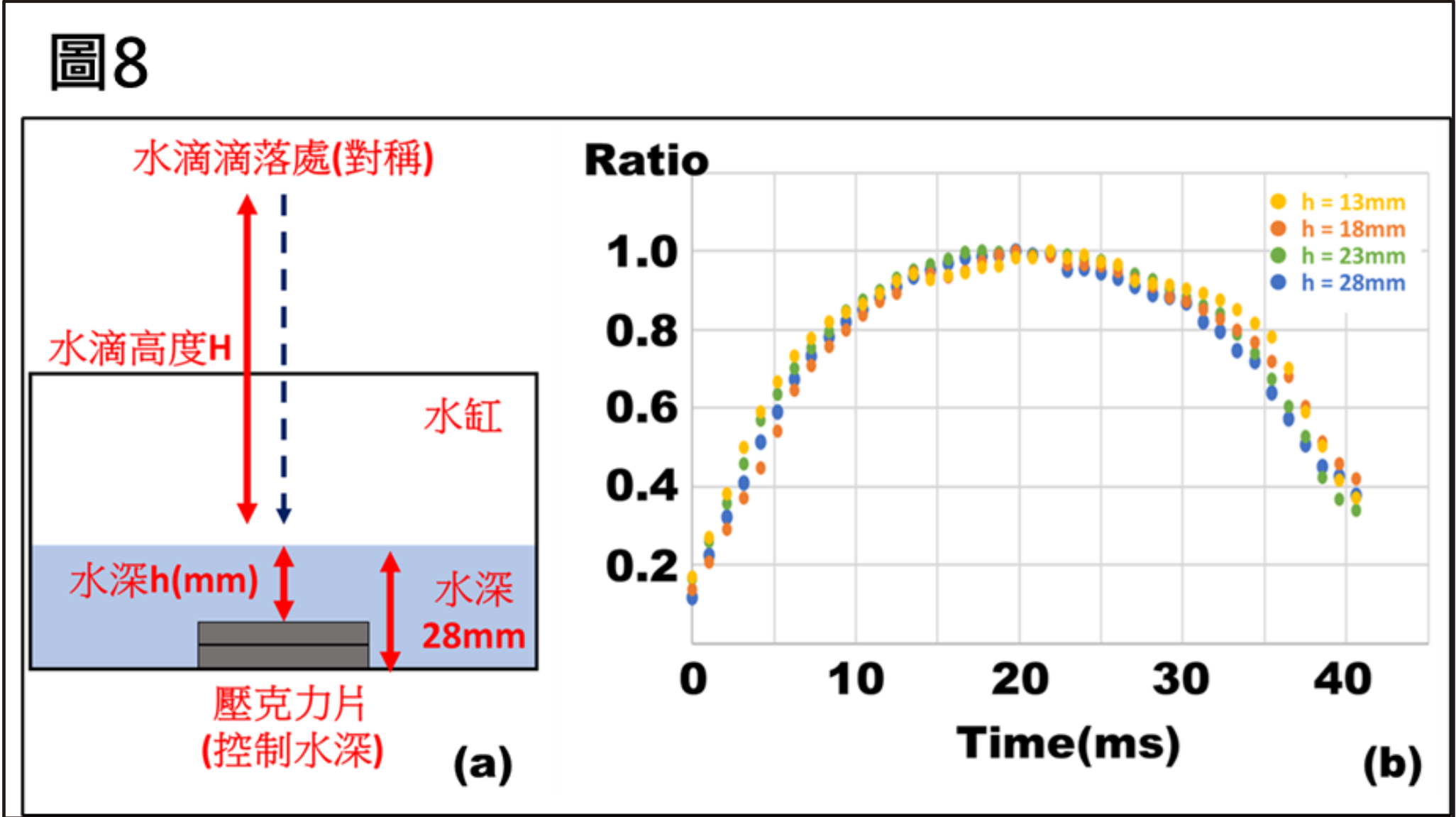


圖 10a 上方照片，是深水的空腔，因空腔形狀接近半圓形，各處的彎曲程度相近，所以合力相近，各部分的收縮速率差異不大，能夠維持半圓形。圖 10a 中間照片，是淺水的空腔，因底部較為扁平，導致中心向左 45° 的位置表面的彎曲程度更大，產生更大的合力，會比空腔底部更快收縮。紅綠藍三色分別代表，45°、30°、0° 三個位置(見圖 10a 下方照片)，測量的結果如同猜想。見圖 10b，深水(h=28mm)時，半圓形的空腔因為各處合力相近，所以各處的擴張期與收縮期時間差不多。反觀圖 10c，45° 位置的合力最大，擴張期時間最短，最早收縮空腔，空腔底部(30° & 0°)則因為容器底部擠壓合力較小，擴張期時間較長、較晚收縮空腔，綜上所述，容器底部擠壓空腔，空腔形變改變收縮速率。

四、鉛直方向收縮不對稱

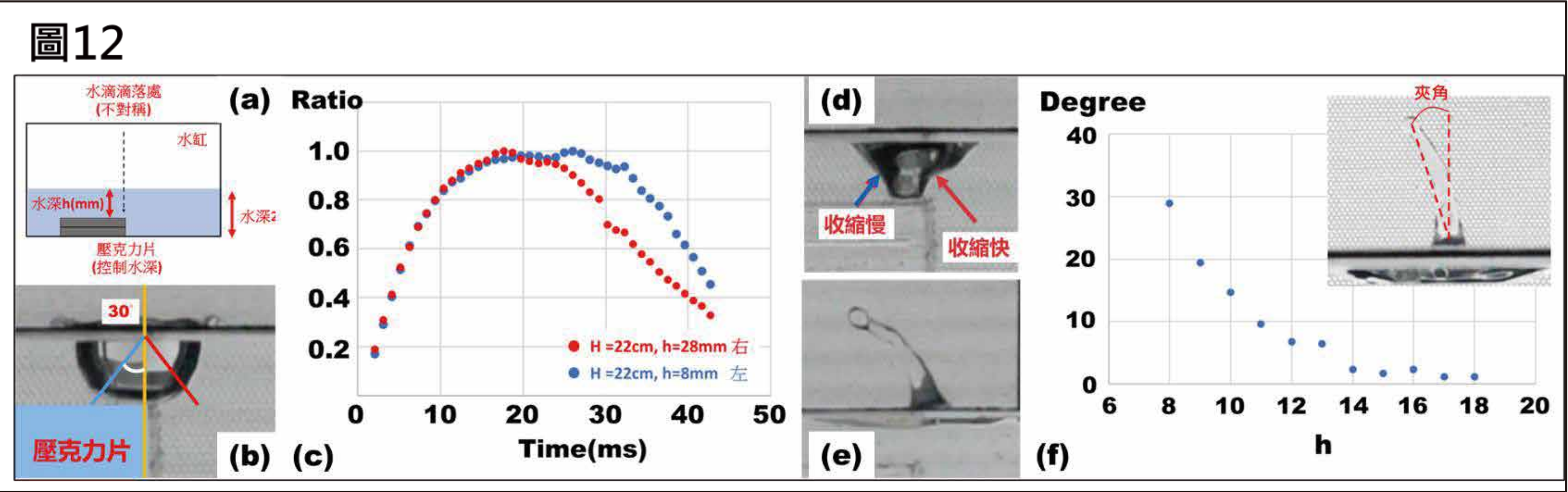
淺水空腔受到壓迫，導致鉛直方向收縮不均，見圖 11a，圖中的紅色與藍色箭頭代表代表收縮速度。45 度的位置收縮較快，空腔變成圓柱形，使底部的表面張力的合力變大(圖 11b，黃色箭頭代表表面張力方向)，導致淺水空腔底部，在後段時間快速收縮(見圖 11c 紅線，水滴高度 30cm，35ms 後)。反觀深水空腔，由於收縮均勻，不會出現後段時間加速收縮的情況(見圖 11c 藍線，水滴高度 30cm)。見圖 11d，兩線代表不同水深的空腔，射流頂部高度 R 與時間的關係，淺水空腔(h=8mm 紅線) 由於加速收縮，導致射流出水速度較快(斜率較大)。綜上所述，空腔受到壓迫，導致鉛直方向的收縮不均，進而影響射流的初速。

五、不對稱邊界的噴流

水滴落在不同水深的交界處，會產生什麼結果?我們通過在水缸底部放置壓克力板改變水深，如圖 12a，將水滴滴落在壓克力片的邊緣，使得左側為水深 8mm，右側水深 28mm。如圖 12b，我們使用 Tracker 分別追蹤空腔中線以左(水深 8mm)和以右(水深 28mm)30° 處的擴張及收縮狀態，結果如圖 12c。空腔右側(紅線)較早收縮，而空腔左側(藍線)則較晚收縮，並且右側較左側先到達空腔中央，圖中也可見到後段時間淺水空腔的收縮速率較大。

透過逐格比對畫面，我們認為由於收縮速率差異(見圖 12d)，右側空腔會較左側空腔先收縮到中央，並且向上形成噴流，由於右側空腔的收縮方向朝向左上，使得噴流產生向左的速度(圖 12e)，當左側空腔也抵達中央時，噴流才開始向正上方射出。最後彙整實驗結果，我們認為空腔在邊界上，因為兩側形變程度不同，導致兩側收縮速率不同，最終使得射流發生水平方向的偏移。

我們進一步控制左側水深 h，調控空腔形變的程度，水深 h 越小，代表左右兩側收縮速率差越大，實驗結果見於圖 12f。由於射流皆為曲線，我們統一以射流頂點與射流基柱中心點的連線為準(見圖 12f 右上角縮圖)，以此連線測量射流夾角。可以發現 h 越小，兩側收縮速率差異越大，形成的射流偏移角度越大。

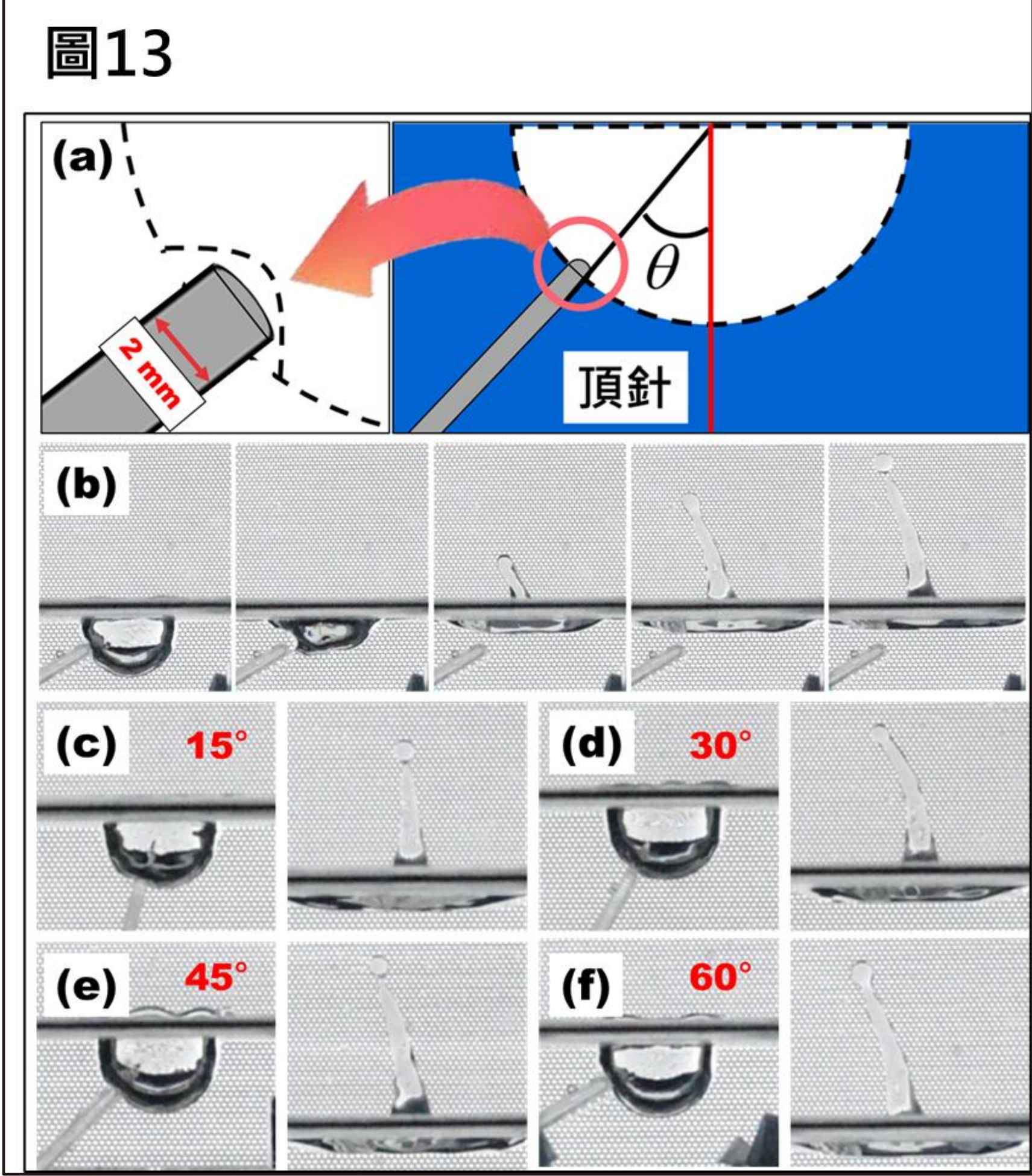


六、局部形變與射流方向

根據我們的形變假說，只要在空腔表面造成不對稱的形變，即可使射流偏移，我們透過雷射切割機加工壓克力片，使壓克力片向空腔中心延伸，(見圖 13a)我們將這樣的構造稱為頂針，它會使半徑 8mm 的空腔向圓心方向凹陷 1mm。由於表面向外彎曲，此處相較於其他位置收縮速率最小，右側的空腔會先收縮完成形成射流，因此射流會向左傾斜。

圖 13b 是頂針角度 75 度的空腔演化過程，可以看到與頂針接觸的位置由於曲面向外，收縮速率較慢，使得右側先收縮完成形成射流，因此射流明顯偏向左側。13c~13f 則是不同頂針角度的空腔與射流，可以看到射流皆有不同程度的偏移，代表使用頂針干預局部空腔的收縮，改變射流的形成，是一個有效的方法。

我們嘗試建立頂針位置與偏移角度的數學關係，但是由於空腔不是完美的半圓形，我們的頂針並不能精準地擊中預定位置，並且製造出相同程度的凹陷。再加上射流為彎曲的狀態，而且射流的形成是個持續過程，局部的不對稱收縮，只會反映在一部分的射流上，我們從圖 13d 上就能明確地看見，射流的前段較為彎曲，中後段的射流則較為筆直。所以尚找不到有效的數學公式可以描述，有待之後我們具備技術，能夠對整個空腔表面取樣，並與射流偏移相比較，以完善數學模型。



七、射流偏移的主要因素

根據前述論文(Lee, Shin, Choi, Jeon, Kim, & Kim, 2020)主張，張力波在空腔表面傳遞時，由於深度差異，波的傳遞速率不同。兩波交會後形成射流，基於動量守恆原理，射流會順著波速較快的波的運動方向偏移。在我們使用頂針產生射流的實驗中，只有頂針所在位置會壓迫空腔。見圖 14a，張力波由空腔邊緣向中心傳遞，左側因為通過頂針區，傳遞速率下降，故左右側張力波交會處會在中線左側的位置上，若交會處在 A 點或 C 點上，由於兩側張力波波速相同，那麼根據動量守恆原理，射流不應該偏移。只有交會處在 B 點時，左側張力波波速較低，射流會向左偏移，這意味著只有頂針在特定角度上，才能導致射流偏移，並且由於速度差固定，射流偏移的角度也必須固定。

見圖 14b，張力波由兩側向空腔底部中央傳遞，我們假定深水區波速 V_1 ，頂針區波速 V_2 且 $V_1 > V_2$ ，頂針區寬度為 D_0 ，空腔半徑為 R ，兩波交會處為中線左側的位置，其位置與中央軸的夾角 θ ，則：

$$\theta(Deg) = \frac{X}{R} \times \frac{180}{\pi} = \frac{90 \cdot D_0}{\pi R} \left(\frac{1}{V_2/V_1} - 1 \right)$$

實驗中， D_0 為 1 mm、空腔半徑 R 的平均值為 8 mm，我們將結果製成圖 14c。圖 14c 的橫軸為 V_2 與 V_1 的比值，縱軸為交會處的角度，由於交會處同時也是頂針的位置，因此可以理解為頂針位置與速度比值的關係。根據觀測結果，空腔與頂針的間隙為 1mm，空腔半徑約為 8mm，代入原論文的公式估算(論文中的式 18,24)，速度比值約為 0.35，要產生射流偏移，頂針角度只能在 10.5 度，並且產生約為 61 度的射流偏移。然而，我們的實驗結果顯示(圖 13c~圖 13f)，頂針位置不同會造成不同角度的射流偏移，而不是只在特定角度才有射流，這意味著張力波的波速差，並不是射流偏移的主因。

結論 Conclusion

根據實驗結果，我們嘗試提出一個新的視角，用以分析空腔的演化。空腔的擴張與收縮由表面張力與液體壓力差主導，表面張力與空腔形狀相關，若能改變空腔形狀，即可調整表面張力的合力方向，進而影響空腔的擴張與收縮。

一、形變的影響

在實驗中(見圖 9)，我們可以看見由於水深較淺，空腔底部受到容器壓迫變形，使得表面張力合力較小，擴張時減速的加速度較小，擴張期時間延長，推遲收縮的時間點。同一因素也影響收縮期的加速度，淺水($h=8\text{mm}$)空腔扁平，導致空腔不同位置的表面彎曲程度不同，表面張力合力大小不同，兩側合力大於底部合力，進而導致兩側先收縮，底部後收縮的情況。空腔收縮成圓柱形，最終使得底部被加速，射流水速度較快。深水($h=28\text{mm}$)則不同於淺水深數據，不同位置收縮程度相當，整體保持半圓形，收縮期時間大致與擴張期時間相當。綜合上述，我們認為主導空腔收縮的因素為表面張力，透過容器改變空腔形狀，能有效控制空腔演化的過程，進而影響射流。

二、不對稱的影響

由於空腔的形變會影響表面張力合力，我們概分為兩種：

1. 淺水空腔受到壓迫而形變，造成鉛直方向的收縮不對稱，使得空腔變成圓柱形(見圖 11b)，空腔底部表面張力合力增加，加速底部收縮，最終讓射流水較大。因此，鉛直方向收縮速率的不對稱，影響射流的速度與高度。
2. 在水深足夠淺，能夠壓迫空腔的情況下，空腔兩側形變程度不同，淺水的一側會有較大的形變，表面張力合力減少，使得擴張期時間拉長收縮的時間點延後。深水的一側，表面張力合力較大，擴張期時間較短，收縮的時間點較早，最終使得深水的一側先完成收縮並形成射流，由於左右不對稱，最終使得射流朝向一側傾斜。水平方向收縮速率的不對稱，影響射流偏移的角度。

三、干預空腔收縮與射流控制

我們用頂針干預空腔局部的收縮速率，使空腔向內凹陷，凹陷處的表面張力合力與空腔收縮方向相反，這使得收縮變慢，進一步造成射流偏移 (見圖 15a)。改變空腔形狀來調控表面張力合力的作法，能帶來不少應用，例如我們使空腔局部的彎曲程度增加(圖 15b)，使表面張力合力方向與收縮方向一致，並且增加合力大小，以加速空腔收縮。此技術或許可以用在降低空蝕現象的破壞上，空蝕是金屬件在流體中高速移動，因流速高壓力變小的特性，部分液體會汽化或溶解氣體釋出，會在液體中形成大量的氣泡，由於氣泡附著在金屬表面，根據我們的形變理論，氣泡與金屬接觸的一側較為扁平，收縮時的速率較慢，使得氣泡收縮結束後，夾帶的水流向金屬表面衝擊造成破壞，若能在金屬表面加工出多個細小凹槽，使得附著在金屬表面的氣泡彎曲程度增加，提高表面張力的合力，使得收縮速率提升，就可以使夾帶的水流向遠離金屬的方向流動，降低對表面的衝擊。

參考文獻資料 Reference

1. 謝承憲、林意勳、林芷卉、廖彥睿、吳政穎、張馨文 (2013)。深水炸彈~探究撞擊波對水體與浮球之力學交互作用。發表於中華民國第 63 屆中小學科學展覽會 (國小組 物理科 第二名)，新北市中和區積穗國民小學。

2. 王昱權、陳御章、王昊恩、沈驗、王相川 (2013)。水花的減緩者。發表於中華民國第 63 屆中小學科學展覽會 (國中組 物理科 第三名)，屏東縣立明正國民中學。

3. 林紫彤、張祐薰、陳可芯、董心嫻、陳有仔、梁倚慈、韓順興 (2015)。接觸一瞬間~蠟油模擬液體碰撞實驗。發表於中華民國第 57 屆中小學科學展覽會 (國小組 物理科 佳作)，新竹縣私立康乃爾國民中小學。

4. Berberović, E., van Hinsberg, N. P., Jakirlić, S., Roisman, I. V., & Tropea, C. (2009). Drop impact onto a liquid layer of finite thickness: Dynamics of the cavity evolution. Physical Review E, 79(3), 036306.

5. Lee, Y., Shin, S., Choi, G., Jeon, H., Kim, Y., & Kim, H. (2020). Symmetry breaking of Worthington jets by gradients in liquid pool depth. *Physics of Fluids, 32*(11), 112104.

註：全文圖片皆為作者群與指導老師合作完成，圖 2 是依照 Lee, Y., Shin, S., Choi, G., Jeon, H., Kim, Y., & Kim, H. (2020).一文的說明圖示重製。